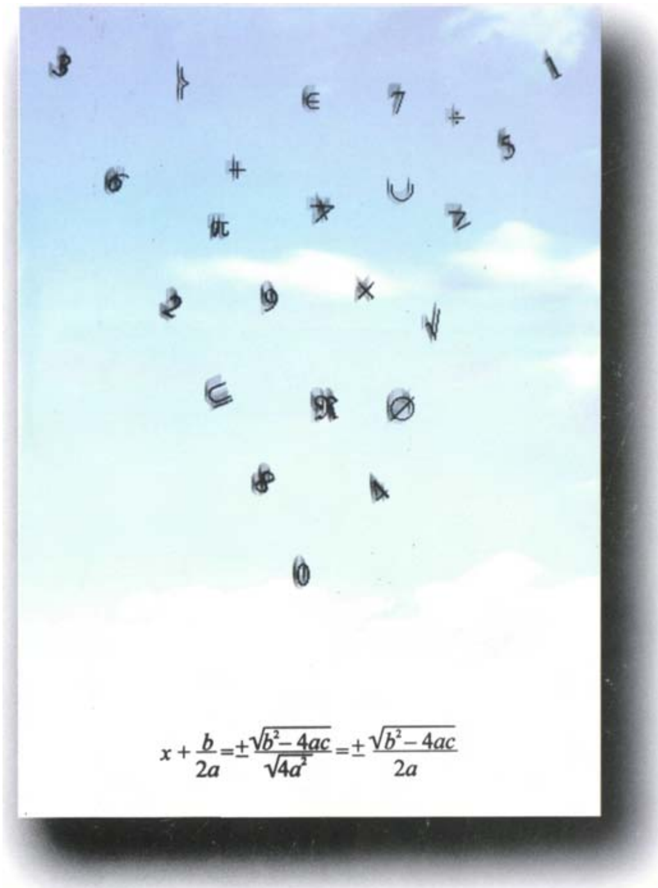
COLECCION LA LLAVE

Fundamentos de álgebra



Claramartha Adalid Diez de U. • Víctor A. Breña Valle • Andrés Morales Alquicira
Ana Elena Narro Ramírez (coord.) • Laura P. Peñalva Rosales
Araceli Rendón Trejo • Jorge O. Rouquette Alvarado • Irene Sánchez Guevara
Tomasa Tlahuel Tlahuel • Sergio de la Vega Estrada

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades

COLECCION LA LLAVE

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

Claramartha Adalid Diez de U. • Víctor A. Breña Valle • Andrés Morales Alquicira
Ana Elena Narro Ramírez (coord.) • Laura P. Peñalva Rosales
Araceli Rendón Trejo • Jorge O. Rouquette Alvarado • Irene Sánchez Guevara
Tomasa Tlahuel Tlahuel • Sergio de la Vega Estrada

Edición: Salvador González Vilchis

Primera edición, diciembre de 1998

Unidad Xochimilco
Calzada del Hueso 1100
Colonia Villa Quietud, Coyoacán
04960, México DF.

ISBN 970-654-391-0

Impreso y hecho en México / *Printed and made in Mexico*

Índice

Capítulo VII

Capítulo VIII

Capítulo IX

Capítulo X

Capítulo XI

Presentación

Las matemáticas constituyen una parte fundamental en la formación de todo profesional, independientemente del área en que se encuentre. En las ciencias sociales, sobre todo en la economía y en la administración, son pieza importante para lograr entender diversas teorías, comportamientos de fenómenos, medición de tendencias, etcétera. En la vida profesional, los bancos, las casas de seguros, las agencias investigadoras que analizan los hechos de la vida económica, política y social hacen uso extenso de las matemáticas para llegar a resultados y conclusiones.

Por ello, los estudiantes y estudiosos de las ciencias sociales que se enfrentan al análisis y estudio de problemas económicos, administrativos, sociológicos y psicológicos son cada vez más conscientes de la necesidad de adquirir una preparación sólida en el campo de las matemáticas.

El presente libro tiene como propósito proporcionar las bases de álgebra que un estudiante de ciencias sociales, en especial de economía y administración, debe conocer y manejar. Se pretende que el alumno adquiera las habilidades algebraicas necesarias en la solución de ejercicios y problemas que aparezcan en sus áreas de estudio.

Este material ha sido diseñado por profesores de la Universidad Autónoma Metropolitana que cuentan con amplia experiencia docente en esta materia. Su intención es brindar apoyo a los alumnos que ingresan a esta institución con serias deficiencias y problemas en este campo matemático. Sin embargo, ellos están conscientes de que este apoyo sólo podrá ser aprovechado por aquellos alumnos que reconozcan estas deficiencias y tengan el firme propósito de superarlas.

El libro está estructurado de la siguiente manera: los primeros capítulos introducen en los diferentes conjuntos de números (naturales, enteros, racionales, irracionales) y en el lenguaje del álgebra. En los capítulos tres y cuatro se trabajan operaciones algebraicas: suma, producto, división, hasta llegar a los productos notables y factorización, fundamentales en los cursos posteriores de matemáticas. En el capítulo cinco se aborda el tema de fracciones y sus respectivas operaciones; mientras que en el seis se dan los elementos para el manejo de logaritmos y sus funciones. A partir del capítulo siete se ven los sistemas de ecuaciones lineales de primero y segundo grado, hasta llegar en el capítulo diez, al estudio de las desigualdades para observar como se encuentran casos donde las soluciones no son puntos sino áreas. Este tipo de sistemas de desigualdades es también ampliamente utilizado en programación lineal. El último capítulo aborda las progresiones aritméticas y geométricas de mucha utilidad en las finanzas. Además, es necesario precisar lo siguiente: se respetó el orden estructural de cada capítulo, pues cada autor y autora así lo determinó. Los números y la creación se llevan muy bien.

El buen conocimiento y manejo del álgebra posibilita el que los siguientes cursos de matemáticas se aborden de una mejor manera. Confiamos y deseamos que el libro cumpla con las expectativas de estudiantes y profesores.

LOS AUTORES
UAM-X, MÉXICO, 1998

Capítulo 1

Número, concepto y fundamento

Introducción

Así como estamos acostumbrados a sentir el sol, ver la luna y las estrellas, y quizá por ello ya no apreciamos su importancia y su grandeza, del mismo modo reaccionamos ante nuestro sistema de números. Existe la falsa creencia de que el aprendizaje de números y operaciones numéricas es aburrido. Nada de eso. (No descartamos, empero, la influencia malhechora de algún profesor en la escuela primaria.)

El sistema de los números merece toda nuestra atención, no sólo porque es base de las matemáticas, sino también porque contiene ideas significativas que dan pie a interesantes aplicaciones las cuales, dicho sea de paso, no tienen nada de monótonas y menos de aburridas.

Entre las civilizaciones del pasado, fueron los griegos los que mejor apreciaron el prodigio y las virtudes del concepto de número. Para éstos, por ejemplo, fue un maravilloso descubrimiento el hecho de que se pueda abstraer de muchas y diversas colecciones de objetos una propiedad tal como la "cinquidad" (de cinco). Sin embargo, existieron otros pueblos que, aunque bien dotados intelectualmente, no consideraron los números de manera abstracta ni pudieron apreciar con lucidez su grandeza.

Números enteros y fraccionarios

Los primeros números que aparecieron fueron los naturales $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ utilizados para contar, ligados siempre a objetos. Las operaciones bien definidas entre ellos son la adición y la multiplicación. Entre los antiguos griegos hubo quienes crearon una filosofía basada en los números: los pitagóricos. Es precisamente Pitágoras quien fundó la secta religiosa que estudió tanto la filosofía como la Naturaleza y que, contándose entre los fundadores de la gran civilización griega, transmitió su actitud racional a los griegos. En la época de nuestro personaje aún predominaban las creencias místicas y religiosas provenientes de Egipto y sus vecinos de Oriente.

A los pitagóricos les emocionaban los números, y puesto que eran místicos, asignaban a aquéllos importancia y significados que ahora juzgamos infantiles. Creían que el número "uno" era la esencia o la naturaleza misma de la razón, pues de ésta resultaba solamente un cuerpo de doctrina. El número "dos" lo identificaban con la opinión, ya que ésta implica claramente la posibilidad de que exista opinión contraria y, por consiguiente, hay por lo menos dos. En el "cuatro" reconocían la justicia, porque éste es el primer número que resulta un producto de iguales. Los pitagóricos representaban los números como puntos en la arena o por medio de piedritas. Para cada número los puntos o las piedritas se ordenaban de manera especial. El número "cuatro", por ejemplo, se representaba con cuatro puntos que sugerían un cuadrado. Así quedaban vinculados el cuadrado y la justicia. Hoy en día, en español "cuadrar" significa ajustar una cosa con otra. "Cinco" denotaba matrimonio por ser la unión del primer número masculino, tres, con el primer femenino, dos. (Los números impares eran masculinos y los pares femeninos). El número "siete" indicaba salud y el "ocho", amistad o amor.

Las especulaciones y los resultados obtenidos por los pitagóricos en relación con los números naturales y sus razones, o fracciones, fueron el inicio de un desarrollo largo y dedicado de la aritmética como ciencia, en contraste con la aritmética como instrumento para apoyar aplicaciones.

Cuando el sistema numérico incluye al cero y los negativos, constituye los números enteros = $\{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$. En este sistema ya están bien definidas las operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

Uno de los miembros más destacados de este sistema numérico es el representante matemático de la ausencia de cantidad, es decir, el cero. (Se denotará por W a $N \cup \{0\}$). Esta cifra es tan familiar, que por lo regular no reparamos en dos hechos importantes: en primer lugar, este miembro del sistema numérico llegó relativamente tarde. Los hindúes concibieron la idea de utilizar el cero y, como otras ideas suyas, ésta pasó a Europa por medio de los árabes. A ninguna de las civilizaciones anteriores, ni siquiera a los griegos, se les ocurrió la conveniencia de disponer de un número que representara la ausencia de objetos. Vinculado con la aparición tardía de este número, está el segundo hecho importante: el cero debe distinguirse de nada (vacío). Es indudable que, por no haber podido hacer esta distinción, los pueblos antiguos tampoco lograron inventar el cero. La distinción entre cero y nada podrá entenderse gracias a los siguientes ejemplos: la calificación de un estudiante en un curso que no haya tomado nunca será ausencia de calificación o nada. Sin embargo, podrá obtener la calificación de cero, en el caso que sí haya asistido. La persona que carezca de cuenta bancaria no tendrá saldo. En caso de que sí la tenga, su saldo podrá ser de cero.

Siendo el cero un número, se puede operar con él; por ejemplo se puede agregar a otro, y así 5+0 = 5. La única restricción impuesta al cero como número es que no se puede dividir entre él, muchos de los pasos en falso que se dan en matemáticas provienen de dividir entre cero; conviene entender claramente por qué está prohibido hacerlo. La respuesta a un problema de división, digamos 6/2, es un número que al ser multiplicado por el divisor produce el dividendo. En nuestro ejemplo, 3 es la solución porque 3 * 2 = 6. Por consiguiente, la respuesta a 5/0 tendrá que ser un número que multiplicado por 0, dé el dividendo 5. No hay, sin embargo, algún número que sirva de cociente porque todo número que se multiplica por 0 da 0. Si se presentara la fracción 0/0, cualquier número puede ser la respuesta, y al no saber qué número elegir no se puede efectuar la operación.

Teniendo a su disposición el cero, los matemáticos pudieron establecer el método actual de escribir números enteros. Primero se cuentan las unidades: las grandes cantidades se miden en decenas o decenas de decenas o decenas de decenas de decenas, etcétera. Así, el doscientos cincuenta y dos se representa como 252. El 2 de la izquierda significa, dos decenas de decenas; el 5 indica 5 veces 10, y el 2 de la derecha simboliza 2 unidades. El concepto de cero hace que sea práctico el sistema de escribir cantidades pues permite, por ejemplo, distinguir 22 y 202. Como el 10 desempeña un papel fundamental en el sistema numérico se le llama sistema decimal, en el cual el 10 es la base. Lo más seguro es que el uso del 10 resultó del hecho de que una persona contaba (y sigue contando) con los dedos y, habiendo pasado por todos los dedos de las manos, consideró que el número al que había llegado era la unidad mayor. Del principio de que la posición de un número es lo que determina la cantidad que representa resulta la notación posicional. El sistema decimal de notación posicional es legado hindú.

Los números negativos

Una adición al sistema de los números, y que incrementó considerablemente el poder de las matemáticas procede de la India remota. Es común usar los números para representar cantidades de dinero, en particular las que se deben. Quizá porque la condición normal de los hindúes era la de estar endeudados, se les ocurrió que sería útil disponer de números que representaran el monto de las deudas. En consecuencia, inventaron lo que ahora se conoce como números negativos; los antecesores de éstos son los números positivos. Cuando es necesario distinguir claramente los números positivos de los negativos , o cuando hace falta recalcar que positivo es opuesto a negativo, se escribe –3,–5 en vez de 3 o 5. En los bancos y en las grandes empresas comerciales, que manejan constantemente números negativos, es frecuente que se escriban éstos con tinta roja y los positivos con tinta negra. Sin embargo, es adecuado poner un signo de menos a un número para indicar que es negativo.

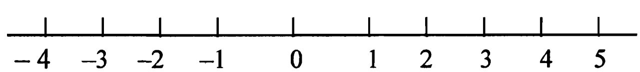
El uso de números positivos y negativos no se limita a la representación de ingresos y egresos, abonos y cargos, haberes y débitos. Se toman como negativas las temperaturas por debajo de 0° y como positivas las que están por encima de esta cifra. Las alturas sobre y bajo el nivel del mar se pueden representar también con números positivos y negativos, respectivamente. A veces tiene sus ventajas representar el tiempo anterior y el posterior a un acontecimiento dado con números negativos y positivos. Por ejemplo, utilizando el nacimiento de Cristo como punto de partida, el año 50 a.C. se podría indicar como el año –50.

Para sacar el máximo provecho del concepto de números negativos debe ser posible operar con ellos igual que con los positivos. Son fáciles de entender las operaciones con números negativos así como con números negativos y positivos simultáneamente si se tiene en mente el significado físico de dichas operaciones. Supóngase, por ejemplo, que una persona tiene un activo de \$ 3 y un débito de \$8. ¿Cuál es el capital neto? Está claro que esta persona tiene \$5 de débito. Es posible hacer el mismo cálculo con números positivos y negativos diciendo que deben restarse \$8 de \$3, es decir, \$3 – \$8, o que debe sumarse un débito de \$ 8 al activo de \$3, o sea, +3 +(–8). La respuesta se obtiene restando el valor numérico menor (es decir, el número que sea más pequeño en términos absolutos, independientemente de su signo) del valor numérico más grande y poniendo al resultado el signo del valor numérico más grande. Así pues, resta 3 de 8, y consideramos negativo el resultado porque el valor numérico mayor, el 8, tiene signo negativo.

Toda vez que los números negativos representan deudas, y que por lo regular la sustracción tiene el significado físico de “quitar” o “extraer”, entonces la resta de un número negativo significará la eliminación de una deuda. Por consiguiente, si una persona tiene un haber de, digamos \$3, y si le pagan una deuda de \$8, entonces la cancelación de ésta dejará a la persona con un haber de \$11. En términos matemáticos se ve que $+3-(-8)=+11$. Y en palabras se dice que, para sustraer un número negativo, se añade el número positivo correspondiente. Supóngase que cierta persona se endeuda a razón de \$5 por día. Así, a los tres días de una fecha dada, tendrá una deuda de \$ 15. Si denotamos la deuda de \$ 5 con -5, endeudarse a razón de \$ 5 por día durante tres días se representa matemáticamente como $3(-5)=-15$. Así, la multiplicación de un número positivo por otro negativo produce un número negativo, cuyo valor numérico es el producto de los valores numéricos implicados.

Hay una definición más sobre los números negativos cuya veracidad es fácil de percibir. Por razones obvias, se dice de los números positivos y del cero que 3 es mayor que 2, que 2 es menor que 12, y que cualquier número positivo es mayor que cero. De los números negativos se dice que son menores que los positivos y que el cero. Además, que -5 es menor que -3, o que -3 es mayor que -5.

Es fácil retener la posición relativa de los números positivos, los negativos y el cero imaginando estos números como los puntos de una línea, como en la figura siguiente. Lo que se aprecia en esta figura no difiere mucho de lo que se observa cuando se pone la escala de un termómetro en posición horizontal (véase la figura):



Ejercicios

1. Supóngase que una persona tiene \$3 y contrae una deuda de \$5 ¿Cuál es su capital neto?
2. Una persona debe \$5 y luego adquiere una deuda nueva de \$8. Utiliza números negativos para determinar su situación financiera.

3. Un comerciante debe \$5 y gana \$8. Utiliza números positivos y negativos para calcular su capital neto.
4. Supóngase que una persona debe \$13 y paga una deuda de \$8. Utiliza números positivos y negativos para calcular su capital neto.
5. Una persona pierde dinero en los negocios a razón de \$100 por semana. Indica este cambio de capital con −100, el tiempo futuro con números positivos y el tiempo pasado con números negativos. ¿Cuánto perderá esta persona en 5 semanas? ¿Cuánto tenía hace 5 semanas?

Operaciones aritméticas

Las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división son familiares. Tal vez por eso no se percibe que son, a la vez, en extremo complejas y de notable eficiencia. Se remontan a los tiempos de los griegos, y poco a poco fueron evolucionando a medida que mejoraban los procedimientos para escribir números y aparecía el concepto de cero. Los europeos heredaron de los árabes los procedimientos correspondientes. Primero, los europeos utilizaron el sistema romano de escribir números, y las operaciones aritméticas tuvieron que basarse en este sistema. En parte porque estos procedimientos eran laboriosos y en parte porque la educación estaba limitada a una minoría: los que poseían el arte del cálculo tenían reputación de diestros matemáticos. En realidad, los procedimientos aritméticos de la época ponían a prueba la inteligencia de la mayoría, al grado de que llegaban a convencerse de que quienes dominaban tales habilidades debían poseer poderes mágicos. Los buenos calculistas eran conocidos como practicantes del "arte negro".

Fracciones y operaciones entre fracciones

Cuando se introducen fracciones, y la división es también una operación bien definida, se está trabajando con el sistema de los números racionales $Q=\{p/q \backslash p,q \in Z, q \neq 0\}$, es decir, Q es el conjunto de enteros con denominador diferente de cero.

Por otro lado, el procedimiento común de escribir fracciones, por ejemplo, 2/3 o 7/5, para expresar partes de un todo no es difícil de comprender. En cambio, las operaciones con fracciones parecen tener algo de misterio. Para sumar 2/3 a 7/5, se lleva a cabo por el siguiente proceso:

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{5}=\frac{10}{15}+\frac{21}{15}=\frac{31}{15}$$

Lo que se hizo fue expresar cada una de las fracciones en su forma equivalente, de modo que los denominadores fueran iguales, y luego se sumaron los numeradores.

Para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{1}{3}*\frac{7}{5}=\frac{7}{15}$$

o también,

$$2*\frac{1}{3}*\frac{7}{5}=2*\frac{7}{15}=\frac{14}{15}$$

La operación de dividir una fracción entre otra es un poco más difícil. El procedimiento correcto consiste en multiplicar el numerador por el inverso del denominador, esto es:

$$2/\tfrac{1}{3}$$

$$2/\tfrac{1}{3}=\frac{2}{1}*\frac{3}{1}=\frac{6}{1}=6$$

$$2/\tfrac{2}{3}$$

$$2/\tfrac{2}{3}=\frac{2}{1}*\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

o bien:

$$\frac{10}{5}\Big/\frac{2}{3}$$

$$\frac{10}{5}\Big/\frac{2}{3}=\frac{10}{5}*\frac{3}{2}=\frac{30}{10}=3$$

Notación decimal

Las fracciones, como los números enteros, se pueden escribir en notación posicional. Así

$$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=\frac{20}{100}+\frac{5}{100}=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$$

Si se conviene en suprimir las potencias de 10, esto es, 10 y 100, así como las mayores potencias cuando las haya, entonces se puede escribir ¼ = 0.25. El punto decimal recuerda que el primer número es en realidad 2/10; el segundo 5/100, y así sucesivamente. Los babilonios ya empleaban la notación posicional para las fracciones, pero utilizaban 60 como base en lugar de 10, igual que para los números enteros. La base decimal para las fracciones fue introducida por los algebristas europeos del siglo XVI. Las operaciones con fracciones se pueden efectuar también en forma decimal. Lo que resulta frustrante de la representación decimal de fracciones es que no todas las fracciones simples se pueden escribir como decimales con un número finito de dígitos. Así, cuando se trata de expresar 1/3 como decimal, se encuentra con que no basta ni con 0.3 ni con 0.33, ni con 0.333, etcétera. Todo lo que puede decirse de este y otros casos parecidos es que, agregando más y más dígitos, es posible aproximarse cada vez más a la fracción, pero ningún número finito de dígitos dará la respuesta exacta. Este hecho se expresa con la notación:

$$\frac{1}{3}=0.333...,$$

en donde los puntos suspensivos indican que se debe añadir continuamente un tres para aproximarse más y más a la fracción 1/3.

Es importante resaltar que la expresión decimal de los números fraccionarios es finita o periódica; en el ejemplo anterior el periodo que se repite es el número 3, lo cual también se indica como:

$$\frac{1}{3}=0.333...,=0.\overline{3}$$

Cuando la expresión decimal de un número no pertenece a ninguno de los tipos mencionados, esto es, cuando es infinita no periódica, el número correspondiente no es racional, entonces se llama irracional: {Irracionales} $= Q' =$ complemento de los Racionales Q.

Ejercicios

1. ¿Cuál es el principio de la notación posicional?
2. ¿Por qué es indispensable el número cero en el sistema de notación posicional?
3. ¿Qué significa la afirmación de que el cero es un número?
4. ¿Cuáles son las dos maneras de representar fracciones?
5. ¿Qué principio determina las definiciones de las operaciones con números fracccionarios?

Los números irracionales

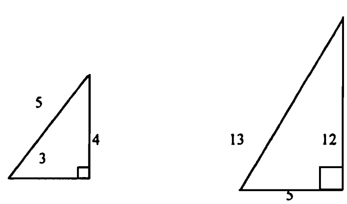
Los pitagóricos, como se hizo notar antes, fueron los primeros en captar el concepto mismo de número, y en tratar de emplear los números para describir los fenómenos fundamentales de los mundos físico y social. Para los pitagóricos, los números fueron también interesantes en sí mismos y por sí mismos. Les gustaron los números cuadráticos, es decir, números como 4,9,16,25,36, etcétera, y observaron que las sumas de ciertos números cuadráticos, o cuadrados perfectos, eran también números cuadráticos. Por ejemplo, 9+16=25; 25+144=169 y, 36+64=100. También se pueden escribir así estas relaciones:

$3^2+4^2=5^2$; $5^2+12^2=13^2$ y, $6^2+8^2=10^2$

A los conjuntos de tres números cuyos cuadrados satisfacen igualdades como éstas se les sigue llamando hasta hoy ternas pitagóricas. Así 3, 4, 5 constituyen una terna pitagórica porque:

$$3^2+4^2=5^2$$

Los pitagóricos trabajaron mucho con estas ternas, fundamentalmente porque se prestaban a una interesante interpretación geométrica (Teorema de Pitágoras). Si los dos números más pequeños son las longitudes de los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo, es decir los catetos, entonces el tercer número será la longitud de la hipotenusa (véase la figura).

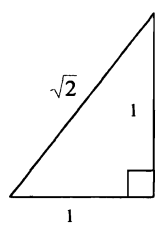


Ejercicios

1. Demostrar que el cuadrado de cualquier número par es par también. (Sugerencia: por definición, todo número par contiene 2 como factor, es decir, se representa como $2n$.)
2. Demostrar que el cuadrado de cualquier número impar es también impar. (Sugerencia: todo número impar termina en 1,3,5,7 o 9 y puede representarse como $2n+1$.)
3. Sea a un número entero. Demostrar que si a^2 es par, entonces a es par también. (Sugerencia: utiliza el resultado del ejercicio 1).
4. Establece la verdad o la falsedad de la afirmación de que la suma de cualesquiera dos cuadrados es asimismo el cuadrado de un número.

Los pitagóricos edificaron una filosofía, para ellos mismos muy satisfactoria, en la que se aseguraba que todos los fenómenos naturales y los conceptos éticos y sociales no eran, en esencia, más que números enteros o relaciones entre números enteros. Pero cierto día a uno de los miembros de la secta se le ocurrió examinar el caso, al parecer más sencillo, del teorema de Pitágoras. Supongamos que cada uno de los catetos de un triángulo (figura siguiente) tiene una longitud de 1. ¿Cuál será entonces la longitud de la hipotenusa? El teorema de Pitágoras dice que el cuadrado (de la longitud) de la hipotenusa equivale a la suma de los cuadrados de los catetos. Por lo tanto, si llamamos "c" a la longitud desconocida de la hipotenusa, de acuerdo con el teorema tendremos que

$$c^2=1^2+1^2$$
$$c^2=2$$



Ahora bien, 2 no es un número cuadrático, es decir, un cuadrado perfecto, y entonces "c" no es un número entero. Pero podría ser una fracción, es decir, que seguramente habría una fracción cuyo cuadrado fuera 2. La fracción 7/5 se acerca al valor correcto porque $(7/5)^2= 49/25$, que es casi 2. Pero por muchas pruebas que se hagan no se encontrará la fracción cuyo cuadrado sea 2.

Para investigar si existe o no una fracción cuyo cuadrado sea 2, se razonó así: se requiere encontrar un número representado con $\sqrt{2}$ Este símbolo significa un número cuyo cuadrado es 2. Supóngase ahora que $\sqrt{2}$ es la fracción *a/b*, en donde *a* y *b* son números enteros. Además, para simplificar aún más el problema, suponga que ya se han eliminado todos los factores comunes de *a* y *b* (*a/b* es una fracción irreducible).

La operación inversa de elevar al cuadrado, es sacar raíz cuadrada. Entonces significa que una operación es inversa de otra cuando una deshace lo que hace la otra.

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b} \tag{1}$$

De ser correcta la ecuación (1), elevamos al cuadrado sus dos miembros, este paso se funda en el axioma de que números iguales multiplicados por números iguales dan resultados iguales; multiplicando el miembro izquierdo $\sqrt{2}$ por $\sqrt{2}$ y el derecho por *a/b*, se obtiene:

$$2=\frac{a^2}{b^2}$$

Aplicando de nuevo el axioma de que números iguales multiplicados por números iguales producen resultados iguales, se obtiene el producto de ambos miembros de la ecuación por b^2 :

$$2b^2=a^2 \tag{2}$$

El miembro izquierdo de esta ecuación es un número par porque contiene 2 como factor. Por lo tanto, el miembro derecho deberá ser también un número par. Pero si a^2 es par, entonces, según los resultados del ejercicio 3, "*a*" deberá ser par también. Si "*a*" es par deberá contener 2 como factor, esto es, $a= 2d$, en donde "*d*" es un número entero. Sustituyendo este valor de "*a*" en (2) se obtiene

$$\begin{aligned} &2b^2=(2d)^2=2d*2d=4d^2 \\ &2b^2=4d^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Se pueden dividir ambos miembros de esta ecuación entre 2 para obtener

$$b^2=2d^2 \tag{4}$$

Por lo que b^2 es número par y, recurriendo una vez más al resultado del ejercicio 3, *b* tendrá que ser igualmente número par.

Lo que demuestra esta argumentación es que si $\sqrt{2} = a/b$, entonces *a* y *b* deben ser números pares. Pero la fracción es irreducible y "*a*", "*b*" siguen conteniendo 2 como factor común. ¡Contradicción! Como el razonamiento es correcto, la única posible equivocación estriba en el supuesto de que $\sqrt{2}$ equivale a una fracción. En otras palabras, $\sqrt{2}$ no puede ser la razón de dos números enteros.

El símbolo $\sqrt{2}$ es un número porque representa la longitud de una línea: la hipotenusa de un triángulo. Pero este número no es ni un entero ni una fracción. La filosofía pitagórica aseguraba que todo cuanto existe en el universo era reducible a números enteros. Ahora se evidenciaba la insuficiencia de la doctrina. La existencia de números como $\sqrt{2}$ fue una amenaza muy seria para la filosofía pitagórica. También descubrieron que hay una colección indefinidamente grande de otros números que tampoco son enteros o fracciones. Así, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$, y en general la raíz cuadrada de cualquier número que no sea cuadrado perfecto, la raíz cúbica de cualquier número que no sea cubo perfecto, y así sucesivamente, son números que ni son enteros ni son fracciones. El número π, que es la razón de la circunferencia a su diámetro, tampoco es entero o fraccionario. Todos estos "nuevos" números se llaman números irracionales. La palabra "irracional" significa ahora que estos números no pueden expresarse como razones de números enteros, pero en tiempos de los pitagóricos era sinónimo de inmencionable, inescrutable o inconocible.

Al agregar irracionales a los racionales, se obtiene el sistema de números reales $\Re = Q \cup \{Irracionales\}$, en el que están bien definidas la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la potenciación y la raíz de números no negativos.

Para poder utilizar los números irracionales, se debe establecer la manera de operar con ellos, es decir, cómo sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos.

Es cierto que

$$\sqrt{2} * \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

Para multiplicar raíces cuadradas, es suficiente con multiplicar los radicandos.

Para la división $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$, el procedimiento es semejante al caso de la multiplicación:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}},$$

pues esta ecuación informa sencillamente que 3/2=3/2.

El número irracional es la primera de muchas ideas sutiles que el matemático ha introducido para reflexionar en ellas al tratar con el mundo real. El matemático crea estos conceptos, idea maneras de trabajar con ellos de modo que se adapten a situaciones reales y utiliza luego sus abstracciones para razonar sobre los fenómenos a los que se apliquen sus ideas.

Ejercicios

1. Expresa las soluciones a estos problemas de la manera más concisa que puedas:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$	b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{7}$	c) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{7}$	d) $\sqrt{7}+\sqrt{7}$
e) $\sqrt{3}*\sqrt{7}$	f) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$	g) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$	h) $\sqrt{12}*\sqrt{3}$
i) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$	j) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$	k) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{2}}$	

2. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{50}$ *b)* $\sqrt{200}$ *c)* $\sqrt{75}$

(Sugerencia: $\sqrt{50} = \sqrt{25} * \sqrt{2} = \sqrt{25} * \sqrt{2}$)

Analiza el siguiente razonamiento: no hay número irracional que pueda expresarse como decimal con un número finito de cifras. El número 1/3 no puede expresarse como decimal con un número finito de cifras. Por consiguiente, 1/3 es número irracional.

3. Explica qué significa la afirmación de que no es un número racional. ¿Es cierto que $\pi=22/7$?

4. Dado

$$A=\{3,-1/3,\sqrt{3}\ ,\ 1/7,\ 0{,}272727\ldots,\ \sqrt[3]{7},\ -2,\ 8/7,\ 3\ 1/4,\ 0,\ 1/2\}$$

Escribir los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

(a) $B=\{x|x \in A$ y $x \in Z\}$
(b) $C= \{x|x \in A$ y $x \in Q\}$
(c) $D= \{x|x \in A$ y $x \in W\}$
(d) $E = \{x|x \in A$ y $x \in N\}$
(e) $G= \{x \mid x \in A$ y x es irracional$\}$
(f) $H= \{x \mid x \in A$ y x es un entero positivo par$\}$
(g) $J= \{x \mid x \in A$ y x es un número primo$\}$
(h) $K= \{x \mid x \in A$ y x es el inverso aditivo de un número natural$\}$

5. De los conjuntos siguientes, ¿cuáles son finitos y cuáles infinitos?

(a) $\{x \mid x$ es número natural par$\}$
(b) $\{x \mid x$ es cualquiera del primer millón de números naturales$\}$
(c) $\{x \mid x \in Q$ y x está entre 3 y 4$\}$
(d) $\{x \mid x \in Q$ y x está entre 1/4 y 1/3$\}$
(e) $\{ x \mid x \in Q$ y x está entre 1/4000 y 1/3000$\}$
(f) $\{ x \mid x \in W$ y x está entre 3000 y 4000$\}$
(g) $\{ x \mid x \in W$ y x está entre 3 y 3 billones$\}$
(h) $\{ x \mid x \in W$ y x es menor que 3 billones$\}$
(i) $\{ x \mid x \in W$ y x es mayor que 3 billones$\}$

Analiza las afirmaciones de los ejercicios 6 a 26.
Marca si son verdaderas o falsas

6. $W \subset N$
7. $W \subset Q$
8. $W \subset Q$
9. $Z \subset Q$
10. $Q \cap Q' = \varnothing$
11. $\sqrt{2} \in Q$
12. $Q \cup Q' = R$
13. Si $a \in Q$, entonces $a \in R$
14. Si $a \in R$, entonces $a \in Q$
15. Si $a \in Z$, entonces $a \in Q$
16. Si $a \in \{O\}$, $a \in R$

17. $Z \cup Q = R$
18. $0 \cup N =$ W
19. $\{0\} \in N$
20. $Z \cup Q = Q$
21. $N \cap W = \{0\}$
22. $0 \subset \{0\}$
23. $-3 \in W$
24. $-3 \in Q$
25. $N \in R$
26. $(Z \cup Q) \subset R$

Explica por qué los números de los ejercicios 27 a 32 son racionales

27. 0.3
28. 3.61
29. 1/7
30. 3,1416
31. 15%
32. 0.5%

En los ejercicios 33 a 41, encuentra el número decimal que es equivalente al número dado.

33. 7/8
34. 3/500
35. 5 2/3
36. 1/9
37. 7/11
38. 3 3/7
39. 14 2/5%
40. 0.7 %
41. 102%

Encontrar una fracción que sea equivalente a cada uno de los números decimales periódicos dados en los ejercicios 42 a 45.

Ejemplo: Hallar la fracción equivalente a 1,03232…

Solución: Sea $n = 0.032032\ldots$ Se consideran dos números con la misma parte decimal. Esto se logra multiplicando n por dos potencias de 10 con exponente múltiplo del número de cifras que integran el periodo. Aquí el periodo es de tres cifras, entonces se consideran:

$$1000\,n = 32.032032\ldots$$
$$1000\,000n = 32032.032032$$

Puesto que las partes decimales son las mismas, la diferencia entre $1000n$ y $1000000n$ es un número natural.

$$1000000n - 1000n = 32032.032032\ldots - 32.032032\ldots$$
$$999000n = 32000$$
$$n = 32/999$$

42. 0.444
43. 0.707070...
44. 1.21414
45. 3,023023...

Axiomas relativos a los números

Para entender el proceso deductivo de las matemáticas de los números, así como de la geometría, se debe reconocer la existencia y el empleo de axiomas (verdades absolutas).

Axioma 1. Para cualesquiera dos números a y b:

$$a + b = b + a.$$

Éste es el axioma conmutativo de la adición. Afirma que se puede conmutar, o intercambiar, el orden de los dos números al sumarlos.

La sustracción no es conmutativa: 3–5 no es lo mismo que 5–3.

Si se tuviera que calcular $3 + 4 + 5$, primero se podrían sumar 4 y 3 y luego 5 al resultado, o se podrían sumar 5 y 4 y luego el resultado a 3. Desde luego, la suma será la misma en ambos casos, y esto es exactamente lo que afirma el segundo axioma.

Axioma 2. Para cualesquiera números a, b y c:

$$(a + b) + c = a +(b + c).$$

Éste es el axioma asociativo de la adición. Indica que se pueden asociar los tres números de dos maneras diferentes al ejecutar la adición.

Los dos axiomas anteriores tienen sus correspondientes para la multiplicación.

Axioma 3. Para cualesquiera dos números a y b:

$$a * b = b * a$$

Éste se llama axioma conmutativo de la multiplicación.

Axioma 4. Para cualesquiera tres números a, b y c:

$$(ab)c = a(bc)$$

Éste se denomina axioma asociativo de la multiplicación. Significa que

$$(3*4)5 = 3(4*5)$$

En el trabajo con números es conveniente utilizar el número 0. Para reconocer formalmente que existe tal número y que posee las propiedades que requiere su significado físico se enuncia el siguiente axioma.

Axioma 5. Hay un único número 0 tal que

a) $0 + a = a$ para todo número a;
b) $0 * a = 0$ para todo número a;
c) si $ab = 0$, entonces $a = 0$, o $b = 0$, o ambos son 0.

El número 1 es otro con propiedades especiales. Por su significado físico se sabe cuáles son las propiedades singulares de 1. Pero para tal justificación las operaciones que se ejecutan con el número 1, basadas en los axiomas, en lugar del significado práctico, deben tener un enunciado que indique cuáles son exactamente esas propiedades. En el caso del número 1, basta con especificar el sexto axioma.

Axioma 6. Hay un único número 1 tal que

$$1 * a = a$$

para todo número a.

Además de sumar y multiplicar cualesquiera dos números, se tienen también aplicaciones para las operaciones de sustracción y división. Se sabe que, dados cualesquiera dos números a y b, hay otro número c, que resulta de sustraer b a a. En el terreno de la práctica es útil reconocer que la sustracción es la operación inversa de la adición. Esto significa sencillamente que si se tiene que encontrar la solución a $5 - 3$ se puede preguntar, y de hecho así se hace, ¿cuál es el número que agregado a 3 da 5? Si se sabe sumar se podrá solucionar el problema de restar. Aun cuando se obtenga la respuesta mediante un procedimiento especial de sustracción, cosa que sucede en el caso de números grandes, la comprobación consiste en sumar el resultado a la cantidad sustraída para ver si resulta el número original, o minuendo. Por lo tanto, es un problema de sustracción, como $5 - 3 = x$; pero lo que en realidad se está pidiendo es el número x que sumado a 3 dé 5: es decir, $x + 3 = 5$. En la exposición lógica del sistema de números se desea afirmar que es posible sustraer un número de cualquier otro, y se expresa de manera que el significado de la sustracción resulte ser precisamente lo que es la inversa de la suma.

Axioma 7. Si a y b son dos números cualesquiera, habrá un único número x tal que

$$a = b + x$$

El número x es lo que comúnmente se representa con $a - b$.

Con respecto a la multiplicación, la división es también la operación inversa. Cuando se trata de calcular 8/2 se puede reducir el problema de división a un problema de multiplicación, preguntando qué número x, multiplicado por 2, da 8, y si se sabe multiplicar se encontrará la respuesta. También aquí, como en el caso de la sustracción, aun si se aplica un procedimiento especial de división larga, para encontrar la respuesta, se comprobará el resultado multiplicando el divisor por el cociente para ver si el producto es el dividendo. Esto quiere decir sencillamente que el significado básico de a/b es el de encontrar algún número x tal que $bx = a$.

Axioma 8. Si a y b son dos números cualesquiera, pero $b \neq 0$, entonces hay un único número x tal que

$$bx = a$$

Por supuesto, x es el número que se acostumbra designar con a/b.

El axioma que aparece en seguida no es tan obvio. Afirma, por ejemplo, que $3 * 6 + 3 * 5 = 3(6+5)$. En este ejemplo se pueden hacer los cálculos para ver si los miembros izquierdo y derecho son iguales. Supóngase que se tiene una manada de 157 vacas y otra de 379, y que cada manada aumenta 7 veces. El total de animales es entonces 7 * 157 + 7 * 379. Pero si las dos manadas originales hubieran sido una sola de 157 + 379 vacas, y esta manada se hubiera multiplicado, se tendría 7(157 +379) vacas. Los hechos muestran que se tiene ahora el mismo número de vacas que antes, es decir, que 7* 157 + 7 * 379 = 7(157 +379).

Dicho en términos generales, se tiene:

Axioma 9. Para cualesquiera tres números a, b y c:

$$ab + ac = a(b+c).$$

Es muy útil el axioma distributivo. Por ejemplo, para calcular 571* 36 +571* 64, = 571(36 + 64) = 571 * 100 = 57100. Ordinariamente se dice que se saca 571 como factor común de la suma (o bien que se ha factorizado esta expresión).

Se observa que:

$$ab + ac = a(b + c)$$

y también:

$$ba + ca = (b + c)a$$

Además de los axiomas anteriores, se tienen otros que se refieren a propiedades evidentes de los números:

Axioma 10. Números iguales a otro son iguales entre sí.

Axioma 11. Si a números iguales se suman o restan números iguales, los resultados serán iguales; y si números iguales se multiplican o se dividen por o entre números iguales, los resultados serán iguales. No está permitida, sin embargo, la división entre 0.

El conjunto de axiomas que se acaban de enunciar no está completo, es decir, no forma la base lógica de todas las propiedades de los números enteros positivos y negativos, los fraccionarios y los irracionales. Sin embargo, en dichos axiomas se tiene la base lógica de lo que se hace generalmente con los números en el álgebra ordinaria.

Ejercicios

1. ¿Es cierto que

$$256(437+729)=256*437+256*729?$$

¿Por qué?

2. ¿Es correcto afirmar que?

$$a(b-c)=ab-ac?$$

[Sugerencia: $b-c=b+(-c)$]

3. Completar las operaciones que se piden en los siguientes ejemplos:

a) $3a+9a$ b) $a*3+a*9$ c) $7a-9a$

d) $3(2^a+4b)$ e) $(4^a+5b)7$ f) $a(a+b)$

g) $a(\ a-b)$

4. Efectuar la multiplicación

$$(a+3)\ (a+2)$$

[Sugerencia: trata $(a+3)$ como un solo número y aplica el axioma distributivo]

5. Calcular $(n+1)(n+1)$

6. Si $3x=6$, ¿es $x=2$? ¿por qué?

7. ¿Es correcto que

$$a+(\ bc\ )=(a+b)\ (a+c)?$$

8. Calcular:

a) $3/4+4/7$ b) $3/5-4/7$ c) $4/7-3/5$ d) $2/9+5/12$

e) $2/9-5/12$ f) $2/9-{}^{-}5/12$ g) $-2/9+{}^{-}5/12$ h) $a/b+c/d$

i) $a/b-c/d$ o j) $a/b-{}^{-}c/d$ k) $1/x+1/2$

9. Calcular:

a) 3/5 * 4/9 b) 3/5 * -4/9 c) –3/5 * $^{-}$4/9 d) (–3/5) * (– 4/9)

e) a/b * c/d f) a/b * c/a g) a/b * b/a h) a/b * $^{-}c/d$

i) 2 /5+ 1/5 j) 2/3 + 3/7 k) 3/5 + 6/10 l) 21/6 + 7/4

m) $a/b \div c/d$ n) 21/8 5 ÷ (1/2) o) – 8 –2

10. Calcular:

a) (2 * 5) (2 * 7) b) 2a * 2b c) 2a* 3b d) 2x * 3y e) 2x * 3y*4z

11. Calcular:

a) (3/4*5/7)÷3/2 b) (3+6a)/3 c)(3a+6b)/3 d)(4x+8y)/2 e) (ab + ac)/a

12. Calcular:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{121}$ c) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ d) $\sqrt{\frac{81}{16}}$

e) $\sqrt{3}\sqrt{3}$ f) $\sqrt{2}\sqrt{8}$ g) $\sqrt{2}\sqrt{4}$ h) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}$

13. Simplificar:

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{48}$ c) $\sqrt{72}$ d) $\sqrt{8}$

e) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ f) $\sqrt{\frac{18}{4}}$ g) $\sqrt{\frac{27}{4}}$ h) $\sqrt{\frac{27}{8}}$

14. Escribir como fracción:

a)0.294 b)0.3742 c) 0.08 d) 0.003

15. Aproximar con números que sean correctos hasta una cifra decimal:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{7}$

16. Escribir los siguientes números en notación posicional de base dos. Los únicos dígitos que puedes emplear en la base dos son 0 y 1.

a)1 b)3 c)5 d)7 e)8 f)16 g)19

Propiedades de igualdad

El símbolo = se usa entre conjuntos para indicar que ambos tienen los mismos elementos. También se escribe $a = b$ para indicar que a y b representan el mismo elemento de algún conjunto. Se requieren ciertas suposiciones acerca de la relación de igualdad respecto al conjunto de los números reales. Estas hipótesis pueden parecer triviales, pero son extremadamente importantes en el desarrollo lógico de este sistema.

Postulado 1. La propiedad reflexiva de la igualdad
Para cada $a \in R$, $a = a$

Postulado 2. La propiedad de simetría de la igualdad
Si $a, b \in R$ y si $a = b$, entonces $b = a$

Postulado 3. La propiedad transitiva de la igualdad
Si $a, b, c \in \mathrm{R}$ y si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

Postulado 4. La propiedad de sustitución de la igualdad
Si $a, b \in R$ y si $a = b$, entonces a puede ser sustituida por b en cualquier expresión, enunciado específico o proposición abierta. Tal sustitución no cambia el valor de la expresión ni altera la veracidad del enunciado específico ni el conjunto de verdad de la proposición abierta.

La primera de estas propiedades, la propiedad reflexiva, ciertamente parece obvia, pero debe destacarse que no todas las relaciones sobre el conjunto de los números reales tienen esta propiedad. Por ejemplo, no es cierto que $a < a$ para cada número real a. Nótese también que si $a, b \in R$ y si $a < b$, no se sigue que $b < a$. Es decir, que la relación "menor que" no tiene la propiedad de simetría. ¿Tendrá la propiedad transitiva?

Postulados de orden

Los postulados de la igualdad no ayudan a comparar números que no son iguales, tales como 13 y 2 o $2\sqrt{2}$ y 2. En el caso de 13 y 2 se sabe que 2 es la cardinalidad de un conjunto que se puede equiparar con un subconjunto propio de un conjunto de cardinalidad 13 y, por tanto, 2 es menor que 13. Pero esto no nos ayuda a comparar 2 con 2 $\sqrt{2}$. Se dice que una persona con un cuarto de su problema correcto tiene menor cantidad correcta que una persona con la mitad correcta; o que un terreno de media hectárea es mayor que otro de un cuarto de hectárea. Éste es el lenguaje que se requiere formalizar.

Se desea establecer una relación de orden entre los números reales. Esto significa que dados dos elementos diferentes de R uno debe ser menor que el otro y se debe tener la posibilidad de decidir cuál es el más pequeño.

Como primer paso en el desarrollo de estas nociones, se supone que el conjunto de los números reales R tiene un subconjunto propio P, con las propiedades descritas en los postulados siguientes, llamados postulados de orden.

Postulado de tricotomía

Si $x \in R$, entonces una, y sólo una, de las proposiciones siguientes es verdadera: $x \in P$, $-x \in P$ o $x = 0$

Postulado de cerradura para P

Si x, y $\in P$, entonces $x + y \in P$ y $xy \in P$.

Se procede a definir P:

Todo elemento de P se llama número real positivo

x es negativo si y sólo si $-x$ es positivo

Para cada par de números reales x y y, se dice que x es menor que y (que se denota por $x < y$) si y sólo si $(y - x) \in P$.

Para cada par de números reales x, y,

x es mayor que y (que se denota por $x > y$) si y sólo si $y < x$.

Las siguientes proposiciones se llaman desigualdades.

$x < y$ (x es menor que y)

$x > y$ (x es mayor que y)

$x \geq y$ (x es menor o igual que y)

$x \geq y$ (x es mayor o igual que y)

El conjunto de los números reales es la unión de 3 conjuntos ajenos: el de los números positivos, el que contiene sólo al 0 y el de los números negativos.

$R = P \cup \{0\} \cup \{x|-x \in P\}$

Los números positivos son mayores que 0 y que los negativos.

Así pues, todo número no nulo es positivo o bien negativo. De ser positivo es mayor que 0 y si es negativo es menor que 0. Pero también, dos números cualesquiera no nulos pueden ser ordenados.

Teorema de tricotomía

Dados cualesquiera dos números reales x y y, una y sólo una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$x < y, \quad y < x, \quad x = y$$

Que R sea cerrado ante la resta significa que

$$x, y \in R \rightarrow x - y \in R$$

Esto implica que una y sólo una de las expresiones siguientes es verdadera:

$$x - y \in P \qquad -(x - y) \in P, \qquad x - y = 0$$

Ya que para: a, b $\in$ R, $-(a - b) = -a + b$, se tiene

$$x - y \in P, \qquad -x + y \in P, \qquad \text{o} \qquad x - y = 0$$

Pero

$$-x + y = y + -x = y - x$$

De modo que una y sólo una de las siguientes proposiciones es cierta:

$$x - y \in \text{P}, \qquad y - x \in \text{P}, \qquad \text{o} \qquad x - y = 0$$

Al resolver la ecuación $x - \text{y} = 0$ y aplicando la definición de <, se puede ver que una y sólo una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$y < x, \qquad x < y., \qquad \text{o} \qquad x = y$$

Del resultado anterior se deduce que para $x \in$ R una y sólo una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$x < 0 \qquad x > 0, \qquad x = 0$$

La desigualdad tiene propiedades similares a las de la igualdad que son necesarias para encontrar la solución de ecuaciones.

Teorema $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

$x > y \Rightarrow x + z > y + z$

Se puede sumar cualquier número a ambos lados de una desigualdad y obtener una desigualdad equivalente. Sin embargo, el resultado de multiplicar ambos lados por un número depende de si el multiplicador es positivo o es negativo. Para multiplicar por un positivo se usa que:

$$x < y \quad \text{y} \quad z > 0 \Rightarrow xz < yz$$
$$x > y \quad \text{y} \quad z > 0 \Rightarrow xz > yz$$

Segunda proposición:

$$x > y \quad \text{y} \quad z > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y < x \quad \text{y} \quad z > 0 \Rightarrow yz < xz \Rightarrow xz > yz$$

Cuando se multiplica por un número negativo, se debe cambiar un "menor que" por un "mayor que" y viceversa.

$$x < y \ \text{y} \ z < 0 \ \Rightarrow \ xz > yz$$
$$x > y \ \text{y} \ z < 0 \ \Rightarrow \ xz < yz$$

Las relaciones de orden < y >, al igual que =, son transitivas.

El teorema de transitividad para desigualdades

$$x < y \ \text{y} \ y < z \ \Rightarrow \ x < z$$
$$x > y \ \text{y} \ y > z \ \Rightarrow \ x > z$$

También son ciertas:

$$x < y,\ a < b \ \Rightarrow \ x + a < y + b$$
$$x > y,\ a > b \ \Rightarrow \ x + a > y + b$$

$$x, y, a, b > 0, x < y \quad \text{y} \quad a < b \ \Rightarrow \ ax > by$$
$$x, y, a, b > 0, x > y \quad \text{y} \quad a > b \ \Rightarrow \ ax > by$$

Ejercicios

1. ¿Qué dice el postulado de tricotomía acerca del número real 0?
2. ¿Es $1 = 0$? Justifica la respuesta.

3. ¿Qué dice el postulado de tricotomía acerca del número real 1?
4. ¿Qué dice el teorema de tricotomía acerca del par de números 0 y 1?
5. ¿Qué dice el teorema de tricotomía acerca del par de números -1 y 1?
6. Aplicar la definición de "menor que" a los siguientes hechos. ¿Qué se puede concluir?

(a) $5<7$	(d) $20-16 \in P$
(b) $-3<-2$	(e) $14-18 \in P$
(c) $15-5 \in \mathrm{P}$	(f) $-3(-2) \in P$

7. Aplicar la definición de "mayor que" a los siguientes hechos. ¿Qué se puede concluir?

(a) $5>2$
(b) $-3>-7$
(c) $10>0$

8. Aplicar la definición de "negativo" a los siguientes hechos. ¿Qué se puede concluir?

(a) -5 es negativo
(b) 4 es negativo
(c) $a+b$ es negativo
(d) $a+b$ es positivo
(e) xy es positivo
(f) xy es negativo
(g) $-(a+b)$ es negativo
(h) $-(xy)$ es positivo

9. Aplicar la definición de $>$ a cada una de las proposiciones del ejercicio anterior. ¿Cuáles son las conclusiones?

10. Suponer que cada una de las proposiciones siguientes es verdadera y escribir una conclusión que se pueda derivar de ella. La conclusión no es necesariamente cierta. ¿Por qué?

(a) $-5>0$
(b) $-2 \in \mathrm{P}$

(c) $a \neq b$ y a no es menor que b

(d) $7-5 \in P$

(e) $7>0$

(f) $-8-6 \in P$

(g) $3>1$

(h) 5 no es menor que 3 y $5 \neq 3$

(i) $2 \in P$ y $7 \in P$

(j) -4 es un número negativo

(k) a no es mayor que 0 y a no es menor que 0

Capítulo 2

Álgebra, la aritmética superior

Las matemáticas giran alrededor del razonamiento. Razonar sobre los números requiere que se dominen el vocabulario y la técnica. El lenguaje de las matemáticas se caracteriza por el empleo de símbolos.

El lenguaje del álgebra

Un ejemplo de la naturaleza y el uso del lenguaje de las matemáticas es el siguiente: en un grupo, alguien solicita a uno de sus integrantes: piensa un número, súmale 10, multiplícalo por 3, réstale 30, ¿cuánto resulta? Te diré el número que pensaste. Para asombro de la concurrencia sí acierta. El secreto de su método es extremadamente sencillo. Suponga que el sujeto elige el número a. Agregarle 10 es $a+10$. La multiplicación por 3 es $3\ (a+10)$. Por el axioma distributivo, esta cantidad es $3a+30$. La sustracción de 30 arroja $3a$. Quien propuso el juego sólo tendrá que dividir entre 3 el número resultante para indicar al sujeto el número pensado. Así, el número elegido originalmente se puede determinar mediante la representación del lenguaje del álgebra de las operaciones pedidas observando, a la vez, su equivalencia.

El lenguaje del álgebra implica algo más que el empleo de letras para representar números o clases de números. La expresión $3\ (a+10)$ contiene, aparte del símbolo más (+) de la aritmética, un paréntesis que significa que el tres se multiplica por el número $a+10$. La expresión b^2 es la forma abreviada de indicar $b*b$; y se lee b cuadrada. Entra aquí la palabra cuadrada porque b^2 es el área del cuadrado de lado b. De igual modo, el signo b^3 significa $b*b*b$; se lee b cúbica o b al cubo. La palabra cúbica alude al hecho de que b^3 es el volumen del cubo de arista b. La expresión $(a + b)^2$ significa que todo el número encerrado entre los paréntesis, esto es, $a + b$, se va a multiplicar por sí mismo. La expresión $3ab^2$ significa tres veces algún número a, producto a su vez multiplicado por el número b^2. Al mismo tiempo, en la notación literal (es decir, por medio de letras) rige la convención de que los números y las letras entre los cuales no haya ningún símbolo habrán de multiplicarse entre sí. Otra importante convención estipula que, si una letra se repite en una expresión dada, representará el mismo número todas las veces. Por ejemplo, en $a^2 + ab$, el valor de a debe ser el mismo en ambos términos. El álgebra se vale así de muchos símbolos y convenciones para representar cantidades y operaciones con cantidades.

El simbolismo del álgebra y el simbolismo de las matemáticas en general son necesidades. La razón más poderosa reside en la concisión. Gracias al simbolismo, se pueden escribir expresiones largas de manera compacta para que el ojo perciba al instante y la mente retenga lo que se está diciendo. Describir en palabras una expresión tan simple como $3ab^3+abc$ requeriría de la frase: "El producto de 3 veces cierto número multiplicado por otro número que se multiplica por sí mismo tres veces y el resultado se suma al producto del primer número por el segundo y otro más." Sería imposible recordar las oraciones largas y complicadas que serían necesarias en caso de que se utilizara el lenguaje ordinario y podrían volverse enredadas e incomprensibles.

Aunada a la concisión está la ventaja de la brevedad. Para expresar en lenguaje ordinario lo tratado en los textos típicos de matemáticas se necesitarían tomos de dos a 10 y hasta 15 veces el volumen de páginas utilizado.

Otra ventaja más es la de la claridad. Los diferentes idiomas que se hablan en el mundo propician la ambigüedad. La afirmación "leo el periódico" puede significar que una persona lee periódicos con regularidad, de vez en cuando, a menudo, o que en ese momento lo está leyendo. Tal ambigüedad es intolerable para el razonamiento exacto. Por eso, para expresar ideas específicas, es imprescindible el uso de los símbolos en matemáticas.

En el simbolismo radica parte de la notable eficacia del álgebra. Si se desea estudiar ecuaciones de la forma $2x+3=0$, $3x+7 = 0$, $4x-9=0$ y así sucesivamente, los números que aparecen en estas ecuaciones carecen de importancia; en todas las ecuaciones lo que se desea es que el producto de algún número x se sume a otro número. La manera de representar todas las ecuaciones posibles de esta forma es:

$$ax + b = 0 \quad (1)$$

Tanto a como b representan cualquier número. Aquellos números que son conocidos, pero cuyos valores particulares no se declaran se llaman parámetros. La letra x representa un número desconocido (incógnita). La forma general (1) abarca la infinidad de casos que corresponden a valores determinados de a y b.

Así, por medio de símbolos, el álgebra puede manejar toda clase de problemas en un solo episodio de razonamientos.

El lenguaje de las matemáticas tiene además el mérito de ser universal. Sin embargo, hay críticas justificadas al simbolismo del álgebra, pero están lejos de tocar aspectos primordiales. Los matemáticos se preocupan por la precisión de sus razonamientos, pero prestan poca atención a la estética o a lo adecuado de sus símbolos. Muy pocos de éstos sugieren lo que significan. Los signos +, –, =, $\sqrt{\ }$ son fáciles de escribir, pero son meros accidentes históricos. Ningún matemático se ha molestado en reemplazarlos por otros más bellos. El simbolismo llegó al álgebra algo tarde. Los egipcios, los babilonios, los griegos, los hindúes y los árabes supieron y aplicaron buena parte del álgebra que se enseña en secundaria.

Ejercicios

1. ¿Por qué se utilizan símbolos en las matemáticas?
2. Analiza la afirmación de que todos los hombres son creados iguales.
3. En las siguientes expresiones simbólicas las letras representan números. Dale forma escrita al significado de estas expresiones:

a) $a + b$ b) $a\,(a + b)$ c) $a\,(a^2 + ab)$ d) $3x^2y$

e) $(x + y)\,(x - y)$ f) $\dfrac{x+3}{7}$ g) $\dfrac{1}{7}(x+3)$

4. ¿Es cierto que

$$\frac{x+3}{7} = \frac{1}{7}(x+3)\,?$$

(Sugerencia: ¿Qué dicen en palabras estas expresiones simbólicas?)

5. Escribe con símbolos: a) tres veces un número más cuatro; b) tres veces el cuadrado de un número más cuatro.

Exponentes

Uno de los ejemplos más sencillos de la comodidad del simbolismo o lenguaje algebraico está en el uso de los exponentes. Se han utilizado frecuentemente expresiones como 5^2 . En esta expresión el número 2 es el exponente y el 5 la base. El exponente se coloca arriba y a la derecha de la base para indicar la cantidad a la que se aplica, 5 en este ejemplo va a multiplicarse por sí misma, de manera que $5^2 = 5 * 5$. Claro que los exponentes no valdrían gran cosa si su uso se limitara a casos como éste pero supóngase que se desea indicar

$$5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5$$

Aquí el cinco aparece como factor seis veces. Esto se indica mediante el uso de un exponente: 5^6. Es fácil ver que, cuando el exponente es un número entero positivo, ello indica las veces que la base, a la que está aplicado, será factor del producto de sí misma. En casos como el de 5^6, utilizando exponentes se ahorra el trabajo de escribir expresiones largas y de tener que contar muchos factores.

Pero los exponentes son más útiles todavía. Suponiendo que se desea escribir

$$5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 \text{ por } 5 * 5 * 5 * 5$$

Con exponentes, se escribe

$$5^6 * 5^4$$

Por otro lado, el producto original requiere que el 5 aparezca como factor 10 veces en total. Este producto se puede escribir como 5^{10}. Pero si sumamos los exponentes de $5^6 * 5^4$ obtenemos también 5^{10}. Por consiguiente, es correcto escribir

$$5^6 * 5^4 = 5^{6+4} = 5^{10}$$

En general, cuando m y n son números enteros positivos,

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Suponga que se desea expresar

$$\frac{5*5*5*5*5*5}{5*5*5*5}$$

Utilizando exponentes se escribe

$$\frac{5^6}{5^4}$$

Además, si se desea calcular el valor del cociente, es posible suprimir cincos del numerador y con los del denominador y obtener:

$$\frac{5*5}{1} \; o \; 5^2$$

Pero se llega al mismo resultado si en $5^6/5^4$ le restarnos 4 a 6. Aquí también, como en el caso de la multiplicación, los exponentes nos informan del número de cincos que hay en el numerador y en el denominador, y la sustracción de 4 a 6 nos comunica el número neto que quedan como factores.

En términos más generales, si m y n son números enteros positivos y si m es mayor que n, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Este resultado es también un teorema sobre exponentes, en el que no se afirma otra cosa que, si se suprimen las a comunes al numerador y al denominador quedan $m - n$ factores.

Puede darse el caso de expresiones como

$$\frac{5*5*5*5*}{5*5*5*5*5*5}$$

Con exponentes este cociente se representa así:

$$\frac{5^4}{5^6}$$

Esta vez, si se suprimen los cinco comunes al numerador y al denominador, quedan dos cincos en el denominador. La expresión resultante será

$$\frac{1}{5*5} = \frac{1}{5^2}$$

Se obtiene de inmediato este mismo resultado restando el exponente 4 del numerador al exponente 6 del denominador. Expuesto en forma general, tenemos el teorema: si m y n son enteros positivos, y si n es mayor que m, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

También es posible encontrarse con

$$\frac{5*5*5*5}{5*5*5*5}$$

Con exponentes este cociente se escribe

$$\frac{5^4}{5^4}$$

Aquí, a diferencia de los dos casos anteriores, los dos exponentes son iguales. Si se resta el exponente 4 del denominador del exponente 4 del numerador se tiene:

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0$$

¿Qué significado puede tener 5^0? Por convención cualquier número elevado a la cero es igual a 1, entonces:

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

En general, si m es un entero positivo:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^{\circ} = 1$$

(Es necesario agregar que a debe ser $\neq 0$ porque si no es así entonces el cociente indicado es indeterminado.)

Ejercicios

1. Simplificar las expresiones siguientes aplicando los teoremas de los exponentes que se acaban de mencionar

   a) $5^4 * 5^6$ b) $6^3 * 6^7$ c) $10^5 * 10^4$ d) $x^2 * x^3$ e) $\frac{5^7}{5^4}$

   f) $\frac{10^7}{10^4}$ g) $\frac{x^4}{x^2}$ h) $\frac{10^4}{10^7}$ i) $10 * 10^4$ j) $\frac{5^4}{5^7}$

   k) $\frac{7^4}{7^4}$ l) $\frac{5^7 * 5^2}{5^3}$

2. ¿Pueden aplicarse los anteriores teoremas de los exponentes a números negativos como base? ¿Será cierto entonces que $(-3)^5(-3)^4 = (-3)^9$?

3. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son correctas?

   a) $3^2+3^4 = 3^6$ b) $3^2 * 3^4 = 3^6$ c) $3^2 + 3^4 = 6^6$ d) $\frac{6^5}{6^7} = \frac{1}{6^2}$ e) $3^4+3^4=3^8$

Aun puede sacarse más provecho a los exponentes. Si en el curso de nuestro trabajo algebraico se presenta la expresión

$$5^3*5^3*5^3*5^3$$

¿ Se podría escribirla de manera más breve? El significado mismo de exponente nos permite poner desde luego

$$5^3*5^3*5^3*5^3=(5^3)^4$$

El miembro izquierdo de la ecuación contiene 5 como factor 12 veces, pero se llega a lo mismo cuando se multiplican los exponentes que están en el miembro derecho. Así se tiene que

$$(5^3)^4=5^{12}$$

Este ejemplo es la esencia de otro teorema sobre exponentes, a saber: si m y n son enteros positivos, entonces

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Hay otro teorema sobre exponentes de mucha utilidad. Si se tiene:

$$2 * 2 * 2 * 2 * 3 * 3 * 3 * 3$$

de manera breve, aprovechando las propiedades de los exponentes, se puede escribir como

$$2^4*3^4$$

Sabiendo que no importa el orden en que multipliquemos los números, también será correcto escribir

$$2*2*2*2*3*3*3*3 = 2*3*2*3*2*3*2*3,$$

y ahora, poniendo exponentes, se concluye que

$$2^4*3^4 = (2 * 3)^4$$

Este hecho significa que, en términos generales, si m es un entero positivo, entonces

$$a^m*b^m=(a*b)^m$$

Ejercicios

1. Aplicar los teoremas de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones:

a) $3^4*3^4*3^4$ b) $(3^4)^3$ c) $(5^4)^2$ d) $10^2*10^2*10^2$

e) $(10^4)^3$ *f) 5^4*2^4 g) 3^7*3^3 h) 10^4*3^4

2. Calcular los valores de las siguientes expresiones:

a) 2^5*5^5 b) $\dfrac{2^4*3^4}{6^3}$

c) $\dfrac{4^5*2^5}{8^6}$ d) $\dfrac{(ab)^3}{a^2}$ e) $\dfrac{a^3b^3}{(ab)^2}$

3. ¿Cuáles de estas igualdades son correctas?

a) $(3*10)^4 = 3^4*10^4$ b) $(3*10^2)^3 = 3^3*10^6$ c) $(3+10)^4 = 3^4+10^4$

d) $(3^2*5^3)^4=3^8*5^{12}$ e) $(3^4)^3 = 3^7$ f) $(3^2)^3 = 3^9$

Todos los teoremas anteriores tratan con exponentes enteros positivos o 0. Pero es importante saber que la notación con éstos ofrece aún más recursos,

Considérese $\sqrt{3}$, se sabe que

$$\sqrt{3}*\sqrt{3}=3$$

El miembro derecho de la ecuación puede escribirse como 3^1. No interesa que la notación con exponentes que se adopte para $\sqrt{3}$, sea 3^a; lo que importa es que la ecuación se lea

$$3^a*3^a=3^1$$

Sería importante conservar la validez de los resultados anteriores, se tiene:

$$3^a*3^a=3^{a+a}=3^{2a}$$

y como $3^{2a}=3^1$, entonces $2a=1$, o $a=1/2$. Lo que este razonamiento sugiere es que si se denota $\sqrt{3}$ como $3^{1/2}$ se tiene por el primer teorema sobre exponentes que

$$3^{1/2}*3^{1/2}=3^{1/2+1/2}=3^1=3$$

En consecuencia, se puede utilizar la notación

$$\sqrt{3}=3^{1/2}, \qquad \sqrt[3]{3}=3^{1/3}, \qquad \sqrt[5]{4}=4^{1/5,}$$

y así sucesivamente.

Capítulo 3

Potencias y polinomios

Conceptos y fundamentos

En el lenguaje algebraico, una letra que representa un número cualquiera se denomina *variable;* en esta sección se generalizan los resultados de la sección anterior, sólo que ahora será con letras.

Las letras más usadas como variables son: *a, b, c, d, x, y, z, m, n, p, q, r.*

El producto repetido de una misma variable (o conjunto de variables) se llama una *potencia* y se expresa mediante un *exponente* aplicado sobre la variable (o conjunto de variables) que sirve de *base.*

Ejemplos:

$a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a = a^5$	exponente: 5 base: a
$pq\,.\,pq\,.\,pq = (pq)^3$	exponente: 3 base: pq
$(x)(x)(x)(x)(x)(x)(x) = x^7$	exponente: 7 base: x

La suma repetida de una misma variable (o grupo de variables) puede escribirse en forma resumida mediante un *coeficiente* que señala cuántas veces esa variable (o grupo de variables) ha sido sumada.

Ejemplos:

$z + z + z = 3z$	coeficiente: 3
$x + x + x + x + x + x + x = 7x$	coeficiente: 7
$ab + ab + ab + ab + ab = 5ab$	coeficiente: 5
$xy^2 + xy^2 + xy^2 + xy^2 = 4xy^2$	coeficiente: 4

Una expresión algebraica es la combinación aritmética de letras o literales y números. Cuando la combinación es tomada sólo a partir de productos y cocientes, la expresión se llama *término.*

Ejemplos:

$$x^2y^3,\ -xy^5z^3,\ \frac{3x}{5y^2},\ -8xy$$

La expresión algebraica que consta de un solo término es llamada *monomio*. La suma o resta de dos monomios origina un *binomio*, la de tres un *trinomio*, y, en general, las de dos o más términos se llaman *multinomio,* y si las literales están afectadas únicamente por exponentes enteros positivos éstos son llamados *polinomios.*

Ejemplos:

$$5xy^2 + 3x^2y - 7 \ ; \ 7x - 6x^5 + 3x^6 \ ; \ 2p^3q^2 - 7p$$

son polinomios; no así:

$$3x^2 - 5/z \ ; \ 5/y + 7$$

Se llaman *términos semejantes* a aquellos que sólo difieren en su coeficiente numérico.

Ejemplos:

$5x^6y^3$, $-16x^6y^3$, x^6y^3 , son todos términos semejantes.

El *grado de un monomio* es la suma de todos los exponentes de los términos literales que lo conforman.

Ejemplos:

El grado de $5x^5y^2z$ es 8;
el de $7pqr^2$ es 4;
el de $17xyz$ es 3.

El *grado de un polinomio* es el correspondiente al término de mayor grado cuyo coeficiente sea distinto de cero.

Ejemplos:

[*i*] En el polinomio: $7x^3y^2 + 2xz^2 - 16yz$, los grados de los términos, o monomios, son 5, 3 y 2 respectivamente. El grado del polinomio es entonces 5.

[*ii*] En el polinomio: $5xy - 3yz + z^2$, todos los términos tienen grado 2, por lo tanto el grado del polinomio es también 2.

Si el polinomio consta únicamente de un término constante, el grado del polinomio es cero; ejemplo: $0x^2 + 0x + 18$

Se usan *símbolos de agrupamiento*, como paréntesis ( ), corchetes [] y llaves {}, para indicar que el grupo de términos contenidos dentro de ellos debe ser considerado como una sola unidad.

Ejemplo:

$$(5x^2 + 3x + 6) + (7x^2 - 2x + 3)$$

Simplificación de un polinomio

La *simplificación de un polinomio* se puede hacer de dos maneras:

1) *Agrupando términos semejantes*. Es decir, sumando o restando los coeficientes de términos semejantes de manera que se escriba un nuevo término único con el coeficiente resultado de la operación.

Ejemplo:
El polinomio $7y^2 - 5xy + 4x^3 - 3y^2 + 8xy - 3x^3$ es equivalente al polinomio $4y^2 + 3xy + x^3$

2) *Eliminando símbolos de agrupamiento (paréntesis, corchetes y llaves)*, de la siguiente manera:

a) si al símbolo antecede un signo positivo, el símbolo se quita simplemente;

b) si el símbolo es antecedido por un signo negativo, al quitarlo, todos los términos cambiarán de signo;

c) si existen varios símbolos de agrupamiento "anidados", es decir, uno dentro de otro, se van eliminando a partir del más interno conforme las dos reglas antes descritas.

Ejemplos:

[*i*] $(7x^2 + 4xy - 5y^2) + (5x^2 - 3xy) - (3x^2 + 8xy - 5y^2) =$

[obsérvese cómo el signo (–) afectará no sólo al primer término de la expresión dentro del paréntesis que se quita, sino a todos los términos en ella]

$$7x^2 + 4xy - 5y^2 + 5x^2 - 3xy - 3x^2 - 8xy + 5y^2 =$$

[se aplica ahora la propiedad conmutativa de los números, representados aquí mediante literales]

$$7x^2 + 5x^2 - 3x^2 + 4xy - 3xy - 8xy - 5y^2 + 5y^2 =$$

[mediante la propiedad asociativa y la simplificación de términos semejantes se llega al resultado final]

$$9x^2 - 7xy$$

[*ii*] $$(5x^3 - (3xy + 8) - 7) + (-6x^3 + 3x - 8) =$$

[primero, quitando el paréntesis]

$$[5x^3 - 3xy - 8 - 7] + (-6x^3 + 3x - 8) =$$

[segundo, quitando los otros dos pares de paréntesis y agrupando términos semejantes]

$$5x^3 - 3xy - 8 - 7 - 6x^3 + 3x - 8 =$$
$$(5x^3 - 6x^3) - 3xy + 3x + (-8 - 7 - 8) =$$

[tercero, los paréntesis presentados en la expresión anterior sirven para señalar el uso de la propiedad asociativa de la operación de suma]

$$11x^3 - 3xy + 3x - 23.$$

Operaciones entre polinomios

La *suma o resta* de expresiones algebraicas, y en particular la de polinomios, se realiza al agrupar términos semejantes mediante la suma o resta, según corresponda.

Ejemplos:

[*i*] $$(5x^2 + 3x + 6) + (7x^2 - 2x + 3) =$$

[quitando paréntesis]

$$5x^2 + 3x + 6 + 7x^2 - 2x + 3 =$$

[usando propiedad conmutativa de las operaciones]

$$5x^2 + 7x^2 + 3x - 2x + 6 + 3 =$$

[señalando la asociatividad de suma y resta]

$$(5x^2 + 7x^2) + (3x - 2x) + (6 + 3) =$$
$$12x^2 + x + 9$$

[*ii*]

$$(5x^2 + 3x + 6) - (7x^2 - 2x + 3) =$$
$$5x^2 + 3x + 6 - 7x^2 + 2x - 3 =$$
$$(5x^2 - 7x^2) + (3x + 2x) + (6 - 3) =$$
$$-2x^2 + 5x + 3$$

Para la *multiplicación y la división* de expresiones algebraicas habrá que distinguir diversos casos.

Multiplicación de monomios

1) Se multiplican los coeficientes siguiendo las reglas de los signos pares:

$$(+)(+) = +$$
$$(+)(-) = -$$
$$(-)(+) = -$$
$$(-)(-) = +$$

(signos iguales = +, signos diferentes = –).

2) Se escribe a continuación el producto de todas las variables distintas que se encuentren en las expresiones a multiplicar.

3) El exponente de cada variable es la suma de todos los exponentes que tienen a esta variable como base. (Aquí es importante recordar que, una variable no presenta exponente porque éste es igual a 1, se sobreentiende.)

Ejemplo:

$$(5xy^2)\,(3x^2y)\,(-7x^5) =$$
$$15\,(xy^2)\,(x^2y)\,(-7x^5) =$$
$$-105\,(xy^2)\,(x^2y)\,(x^5) =$$
$$-105x^{(1+2+5)}y^{(2+1)} =$$
$$-105x^8y^3$$

Un caso especial se presenta cuando uno de los monomios es un término constante, en este caso, la componente literal queda idéntica y sólo se multiplica el coeficiente de la componente literal por el término constante, respetando las reglas de los signos antes mencionadas.

Ejemplos:

[*i*] $5(12x^3y^5z) = 60x^3y^5z$

[*ii*] $-3(40ab^3c^2) = -120ab^3c^2$

[*iii*] $(5p^3qr^7)(-8) = -40p^3qr^7$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los términos que constituyen el polinomio, en la forma previamente descrita y sumando todos los resultados obtenidos.

Ejemplos:

[*i*] $3ab^3(6ab + b^2) = (3ab^3)(6ab) + (3ab^3)(b^2) = 18a^2b^4 + 3ab^5$

[*ii*] $-5pq^2r(7pq - 2p^2qr^3) = (-5pq^2r)(7pq) - (-5pq^2r)(2p^2qr^3) =$

$= -35p^2q^3r - (-10p^3q^3r^4) = -35p^2q^3r + 10p^3q^3r^4$

Multiplicación entre dos polinomios

Se multiplican todos y cada uno de los términos del primer polinomio por todos y cada uno de los términos del segundo, sumando los productos obtenidos y agrupando los términos que resulten semejantes.

Ejemplos:

[*i*] $(x^2 - 3x + 9)(x + 2) = (x^2 - 3x + 9)(x) + (x^2 - 3x + 9)(2) =$

$(x^3 - 3x^2 + 9x) + (2x^2 - 6x + 18) = x^3 - 3x^2 + 9x + 2x^2 - 6x + 18 =$

$x^3 - x^2 + 3x + 18$

[*ii*] $(2x + y - z)(3x - z + y) =$

$(2x)(3x - z + y) + (y)(3x - z + y) - (z)(3x - z + y) =$

$6x^2 - 2xz + 2xy + 3xy - yz + y^2 - 3xz + z^2 - yz =$

$6x^2 - 5xz + 5xy - 2yz + y^2 + z^2$

División de monomios

Se efectúa el cociente de los coeficientes, especificando el signo del resultado de acuerdo a las siguientes reglas:

$$\frac{(+)}{(+)} = + \qquad \frac{(-)}{(-)} = +$$

$$\frac{(+)}{(-)} = - \qquad \frac{(-)}{(+)} = -$$

(signos iguales = +, signos diferentes = –).

Se efectúa la resta entre los exponentes de las literales similares, dejando cada potencia resultante en el numerador o denominador, de acuerdo en donde se presente el exponente de mayor magnitud. (Es importante aquí recordar que si el resultado de esta resta es igual a cero, la potencia equivale a 1, y como el factor 1 es el idéntico multiplicativo, la variable "desaparece".) Las literales que no tengan similar con qué operar se dejan en su lugar original.

Ejemplos:

[*i*] $$\frac{18a^3b^2c}{-3ab^3} = \frac{-6a^2c}{b}$$

[*ii*] $$\frac{15xyz^5}{5xz^3} = 3yz^2$$

[*iii*] $$\frac{7pr^5}{4p^2qr^5} = \frac{7}{4pq}$$

División de un polinomio entre un monomio

Se dividen todos y cada uno de los términos del polinomio entre el monomio divisor, según la forma antes descrita y sumando los resultados de cada división.

Ejemplos:

[*i*] $$\frac{4a^3+16ab-4a^2}{2a^2b} = \frac{4a^3}{2a^2b} + \frac{16ab}{2a^2b} - \frac{4a^2}{2a^2b} = \frac{2a}{b} + \frac{8}{a} - \frac{2}{b}$$

$$[ii]\ \frac{-15x^3+9x^2+3xy-7}{-3x^2}=\frac{-15x^3}{-3x^2}+\frac{9x^2}{-3x^2}+\frac{3xy}{-3x^2}-\frac{7}{-3x^2}=5x-3-\frac{y}{x}+\frac{7}{-3x^2}$$

División de un polinomio entre un polinomio

Para facilitar la comprensión del método, se presenta en un ejemplo desarrollado paso por paso.

La división a efectuar es:

$$\frac{-5x^2+4x^3+3x-2}{x+1}$$

1) Se presentan los términos de los polinomios en orden decreciente de potencias.

$$\frac{4x^3-5x^2+3x-2}{x+1}$$

2) Se divide el primer término del polinomio dividiendo entre el primer término del polinomio divisor.

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2 \\ \hline x+1 & 4x^3-5x^2+3x+12 \end{array}$$

3) El cociente resultante se multiplica por todos y cada uno de los términos del divisor, restándose el resultado término a término al polinomio original.

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2 \\ \hline x+1 & 4x^3-5x^2+3x+12 \\ & \underline{-4x^3-4x^2} \\ & 0\ -9x^2+3x+12 \end{array}$$

4) Con el nuevo dividendo en este caso igual a $-9x^2$, se repiten los pasos anteriores hasta obtener un residuo igual a cero, o de grado menor al dividendo.

1a. repetición

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2-9x \\ \hline x+1 & 4x^3-5x^2+3x-2 \\ & \underline{-4x^3-4x^2} \\ & 0\ -9x^2+3x+12 \\ & \quad \underline{+9x^2+9x} \\ & \quad 0\ +12x+12 \end{array}$$

2a. repetición

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 9x \;\; + 12 \\
\cline{2-2}
x + 1 & 4x^3 - 5x^2 + 3x + 12 \\
 & \underline{-4x^3 - 4x^2} \\
 & 0 \;\; - 9x^2 + 3x + 12 \\
 & \quad \underline{+9x^2 \;\; + 9x} \\
 & \qquad 0 \;\; + 12x + 12 \\
 & \qquad\qquad \underline{-12x \;\; - 12} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Otro ejemplo:

$$\frac{1 - x^2 + x^4}{1 - x}$$

Paso 1)

$$\frac{x^4 - x^2 + 1}{x - 1}$$

Paso 2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \\
\cline{2-2}
x - 1 & x^4 - x^2 + 1
\end{array}
$$

Paso 3)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\quad x^3 \\
\cline{2-2}
x - 1 & x^4 - x^2 + 1 \\
 & \underline{-(x^4 - x^3)} \\
 & \;\; 0 + x^3 - x^2 + 1
\end{array}
$$

Paso 4)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 \\
\cline{2-2}
x - 1 & x^4 - x^2 + 1 \\
 & \underline{-(x^4 - x^3)} \\
 & \;\; 0 \; + x^3 - x^2 + 1 \\
 & \qquad - \underline{(x^3 - x^2)} \\
 & \qquad\quad 0 \quad 0 \; + 1
\end{array}
$$

como el siguiente polinomio dividendo (+ 1) es de grado (0) menor al grado (1) del polinomio divisor, la división queda concluida.

Ejercicios

1) En las siguientes expresiones algebraicas identifica literales, exponentes y coeficientes.

a) $6a^2b^3$ b) $-15xyz^4$ c) $5p^2qr - 7prq^3$

d) $\frac{7}{4}x^3y^{\frac{1}{2}}$ e) p^5q f) $-ab^{3/4}$

2) Identificar si las siguientes expresiones algebraicas son o no polinomios. Señalar sus términos y, en particular, sus términos semejantes.

a) $4x^2 \frac{y}{z}$ b) $x^3 + 3y^2z$ c) $5x^2 - x + 2$

d) $3x^3 + \frac{7}{y}$ e) $\sqrt{y} + \sqrt{z}$

3) Señalar el grado de cada polinomio presentado.

a) $x^5 + x^2 - 6$ b) $7 - 3x + 5x^2$ c) $x^3 - y^2 - 7xy$

d) $4xy^2 + z^2 - 7xyz$ e) $x^3 + y^3 + 8$ f) $8xy^5 - 2x^7y + x^5y^5$

4) Simplificar los polinomios siguientes:

a) $3x^2 + (y^2 - 4z) - (2x - 3y + 4z)$
b) $2(4xy + 3z) + 3(x - 2xy) - 4(z - 2xy)$
c) $x - 3 - 2\{2 - 3(x - y)\}$
d) $4x^2 - \{3x^2 - 2[y - 3(x^2 - y)] + 4\}$
e) $3(x^2 - 2yz + y^2) - 4(x^2 - y^2 - 3yz) - x^2 + y^2$

5) Sumar los polinomios de cada uno de los grupos siguientes:

a) $2x^2 + y^2 - x + y$, $3y^2 + x - x^2$, $x - 2y + x^2 - 4y^2$
b) $a^2 - ab + 2bc + 3c^2$, $2ab + b^2 - 3bc - 4c^2$, $ab - 4bc + c^2 - a^2$
c) $b^2ac - abc^2 - 3a^2bc$, $4b^2ac + 4bca^2 - 7ac^2b$, $7b^2ac - 5bca^2 + 3ac^2b$

6) Restar el segundo polinomio del primero, en las parejas siguientes:

a) $3xy - 2yz + 4zx, \quad 3zx + yz - 2xy$
b) $4x^2 - 5xy + 7y^3, \quad 3x^2 + 5yx - 10y^3$
c) $8b^2 + 3 - 7ca^3, \quad -8b^2 + 3 + 7ac^3$
d) $7pqr - 3p^3 + 4q^2, \quad 3qrp + 3p^3 - 4q^2$
e) $-9xy + 7x^4 + 4y^5, \quad -3xy - 7x^4 + 2y^3$

7) Multiplicar:

a) $(3xy^2)(4xy^2)$
b) $(5abc)(2ab^2c)$
c) $(4x^2y^3)(-3xy^5)$
d) $(-17pr^4)(-2p^4r)$
e) $(4x^2y^3)(-3xy^5 + 2x^2y^3)$
f) $(-5pr^3)(-2p^2r + 4pqr - q^4)$
g) $(x + 1)(x^2 - x + 5)$
h) $(x + 1)(x + 3)(x - 1)$
i) $(3xy^2 + 4xy^2)(4x^2y^3 - 3xy^5 + 2x^2y^3)$
j) $(5ab^2)(-2ac + 3a^2b)(7a^2 + 3)$

8) Dividir:

a) $\dfrac{-12x^4yz^3}{3x^2y^4z}$
b) $\dfrac{18r^3s^2t}{-3r^5s^2}$
c) $\dfrac{4ab^3 - 3ab^2c + 6a^3b^2}{2a^2bc}$

d) $\dfrac{2y^3 + y^5 - 3y - 2}{y^2 - 3y + 1}$
e) $\dfrac{4x^3y + 5x^2y^2 + x^4 + 2xy^3}{x^2 + 2y^2 + 3xy}$

Capítulo 4

Productos notables y factorización

Las siguientes fórmulas de multiplicación de expresiones algebraicas ayudan a factorizar muchas expresiones, sin embargo se debe aprender a reconocer cuál utilizar en cada caso. Estas expresiones reciben el nombre de productos notables.

Binomio al cuadrado

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) \text{ o también } (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) \text{ o también } (x-y)^2 = x^2-2xy-y^2$$

Binomios conjugados

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Nota: Observar que los binomios conjugados difieren del binomio al cuadrado tan sólo en el signo de uno de los binomios. El resultado se conoce como diferencia de dos cuadrados.

Binomio con término común

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

Diferencia de dos cubos

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$$

Suma de dos cubos

$$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$$

Binomio al cubo

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Como los símbolos x, y representan números reales, pueden reemplazarse por expresiones algebraicas. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

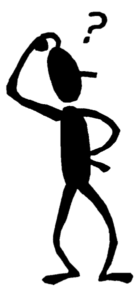
Ejemplos

Encontrar los productos:

a) $\left(2r^2-\sqrt{5}\right)\left(2r^2+\sqrt{5}\right)=\left(2r^2\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=4r^4-5$

b) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}\,\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+2+\dfrac{1}{x}$

Ejercicios



1. $(x-7)(x+4)$
2. $(2x+4y)(6x-7y)$
3. $\left(3x+\frac{1}{2}y\right)\left(2x-\frac{1}{3}y\right)$
4. $(a^2+4)(a^2-3)$
5. $(2x-3y)^2$
6. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
7. $(2\sqrt{x}+4y^2)(2\sqrt{x}-4y^2)$
8. $(a+b+c)(a+b-c)$

Factorización

Si un polinomio está escrito como el producto de otros polinomios, entonces cada uno de estos últimos se llama un *factor* del polinomio original. El proceso para encontrar tales productos se llama factorización.

Por ejemplo, como $x^2-1=(x+1)(x-1)$, vemos que $x+1$ y $x-1$ son factores de x^2-1.

El concepto de factor puede extenderse a expresiones algebraicas generales. El uso principal de la factorización, sin embargo, está en la simplificación de expresiones tomadas de polinomios. Si se usan coeficientes reales, entonces cualquier polinomio tiene como un factor a todo número real c que no es igual a cero.

Como ilustración, dado $3x^2y - 5yz^2$ y cualquier número real c distinto de cero, podemos escribir este polinomio en la forma

$$c\left(\frac{3}{c}x^2y - \frac{5}{c}yz^2\right)$$

A un factor c de este tipo se le llama un *factor trivial*. El interés principal está en factores *no triviales* de polinomios, es decir, factores que contienen polinomios en ciertas variables de grado mayor que cero. Una excepción a esta regla es que si los coeficientes se limitan a ser enteros, lo que se hace es quitar el factor entero común de cada término del polinomio mediante la ley distributiva.

$$4x^2y + 8z^3 = 4(x^2y + 2z^3)$$

Antes de empezar con factorización de polinomios, es necesario especificar el sistema mediante el cual se han de elegir los coeficientes de los factores. Generalmente se usa la regla de que si se da un polinomio con coeficientes enteros, entonces los factores deberán ser polinomios con coeficientes enteros. Si se empieza con un polinomio con coeficientes racionales, entonces los factores también deberán tener coeficientes racionales.

Como ejemplos tenemos

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) \quad \text{y} \quad 4x^2 - 9/16 = (2x - 3/4)(2x + 3/4)$$

Factorizar una expresión algebraica o un número real implica expresarlo como el producto de factores.

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \qquad 60x + 90y + 150z = 30(2x + 3y + 5z)$$

$$6 = 2 \times 3 \qquad 12a + 18b = 6(2a + 3b)$$

En general, no es fácil factorizar polinomios con grados altos. En casos más sencillos, algunas de las reglas de multiplicación dadas en los productos notables son útiles. Cuando esas fórmulas se utilizan para factorizar, deben leerse de derecha a izquierda. Por ejemplo, dada una expresión de la fórmula $x^3 + y^3$ vemos, por suma de dos cubos, que puede ser factorizado como $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Es esencial familiarizarse con los productos notables, de manera que se pueda reconocer si alguno puede aplicarse en algún problema dado.

Ejemplos

a) Factorizar $8x^6 - 27y^9$

Se reconoce como la diferencia de dos cubos, ya que tenemos

$$\begin{aligned} 8x^6 - 27y^9 &= (2x^2)^3 - (3y^2)^3 \\ &= (2x^2 - 3y^3)(4x^4 + 6x^2y^3 + 9y^6) \end{aligned}$$

b) Factorizar $16x^4 - (y - 2z)^2$

Se trata de la diferencia de dos cuadrados, pues se tiene

$$\begin{aligned} 16x^4 - (y - 2z)^2 &= (4x^2)^2 - (y - 2z)^2 \\ &= [(4x^2) + (y - 2z)]\,[(4x^2) - (y - 2z)] \\ &= (4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z) \end{aligned}$$

Hay diversas técnicas que se pueden utilizar según sea la forma de la expresión que se vaya a factorizar.

Factorización por factor común

Esta forma de factorización es una de las más útiles, ya que permite factorizar casi todas las expresiones algebraicas. Como su nombre lo indica, se factoriza una expresión dada buscando un factor común a todos los términos o en su defecto que corresponda al máximo común divisor.

Se tiene la expresión

$$abx+cdx+efx$$

Pasos a seguir:

1. Buscar un factor que aparezca en todos los términos.
   En este caso el factor común es x.

2. Al encontrar el factor común se debe multiplicar por los factores no comunes.

$$x\,(ab + cd + ef)$$

Ejemplo

Factorizar $3a^2 b^2 + 9a^3 b$

Ya que $3a^2 b^2 = (3a^2 b)b$ y $9a^3 b = (3a^2 b)\,3a$, cada término de la expresión original contiene el factor común $3a^2 b$, por lo tanto

$$3a^2 b^2 + 9a^3 b = 3a^2 b\,(b + 3a)$$

Factorización por agrupamiento

La factorización por agrupamiento es otra técnica muy sencilla que consiste en buscar los posibles factores comunes en la expresión y agrupar los términos de acuerdo con ellos, para que después se obtenga el factor común. En esta técnica de factorización se encuentran factores que *no* son comunes a *todos* los términos, pero que son comunes a algunos.

Como ejemplo se factoriza la siguiente expresión:

$$ax+by+ay+bx$$

Pasos a seguir:

1. Identificar los posible factores comunes.

Es posible darse cuenta de que no existe un factor común a todos los términos, pero sí existen dos factores comunes a términos diferentes: x es factor común de ax , bx; y es factor común de ay, by.

2. Agrupar los factores de acuerdo a cada factor común.

$$ax + bx + ay + by$$

3. A continuación se factoriza por cada factor común.

$$x\,(a + b) + y\,(a + b)$$

4. Se observa que obtuvimos dos términos. Localizar de nuevo el factor común. Dicho factor común es $(a + b)$.

5. Factorizar nuevamente por cada factor común, multiplicando el término común por los no comunes (x,y).

$$(a + b)(x + y)$$

Ejemplo

Factorizar $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 &= x^2\,(3x + 2) - 4\,(3x + 2) \\ &= (3x + 2)\,(x^2 - 4) \\ &= (3x + 2)\,(x + 2)\,(x - 2) \end{aligned}$$

Factorización por el método del tanteo y el error

Este método es uno de los más usuales. Con él podemos factorizar polinomios de tres términos, de una manera sencilla y rápida. Este método requiere que se memorice una pequeña regla.

Si un polinomio es de la forma $ax^2 + bx + c$; donde: a, b y c son enteros, y es factorizable, entonces adopta la forma $(dx + e)\,(fx + g)$, donde: d, f, e y g son enteros.

Así: $\quad d*f = a \qquad e*g = c \qquad d*g + e*f = b$

Se debe tener presente que para factorizar de esta forma es necesario que a, b y c sean números enteros, pues de esa manera obtendremos factores con números enteros, lo que permitirá que el proceso sea más fácil.

Por ejemplo:

$$2x^2 - 9x - 5$$

Pasos a seguir:

1.Obtener dos números (dx, fx) cuyo producto es el primer término del trinomio.

$$2x \cdot x = 2x^2$$

2. Obtener dos números (e, g), cuyo producto sea igual al tercer término de la expresión.

$$(1)(-5) = -5$$

3. Sustituir en la fórmula comentada en el párrafo anterior.

$$ax^2 + bx + c = (dx + e)(fx + g)$$

$$2x^2 - 9x - 5 = (2x + 1)(x - 5)$$

4. Comprobar que:

$a = 2x \cdot x = 2x^2$ $\quad$ b $= (2x \cdot -5 = -10x) + (1 \cdot x = x) = -9x$ $\quad$ $c = (-5)(1) = -5$

Ejemplo

Factorizar $\quad 6x^2 - 7x - 3$

Si escribimos $6x^2 - 7x - 3 = (dx + e)(fx + g)$, el producto de d y f es 6, mientras que el producto de e y g es -3. Se buscan las distintas posibilidades $(2)(3) = 6$, $(1)(6) = 6$, $(1)(-3) = -3$, $(-3)(1) = -3$
quedándonos $\quad 6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$

Este método del "tanteo y el error", puede aplicarse también a polinomios de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

Ejemplo

Factorizar $\quad 4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3$

Como cada término tiene a x^2y como factor, se comienza por escribir la expresión en la siguiente forma $4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x^2 - 11xy + 6y^2)$ $= x^2y\,(4x - 3y)\,(x - 2y)$

Se comprueba que:

$$a = (4)(1) = 4$$

$$b = (4)\,(-2) + (-3)(1) \;= -8 + (-3) \;= -11$$

$$c = (-3)\,(-2) = 6$$

Factorización de una ecuación cuadrática

Un binomio al cuadrado da como resultado un trinomio cuadrado perfecto.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se le llama trinomio cuadrado perfecto ya que los términos que están en los extremos tienen raíz cuadrada exacta. Al factorizar un trinomio cuadrado perfecto se debe expresar el producto de un binomio al cuadrado. Pero antes hay que determinar si ese trinomio realmente es cuadrado perfecto.

Como ejemplo, factorizar el siguiente polinomio:

$$4a^2 + 16ab + 16b^2$$

Pasos a seguir:

1. Reconocer si es un trinomio cuadrado perfecto.

2. Sacar la raíz cuadrada del primero y segundo término.

$$\sqrt{4a^2} = 2a \qquad\qquad \sqrt{16b^2} = 4b$$

3. Sustituir en la fórmula de binomio al cuadrado.

$$(2a + 4b)^2$$

4. Para comprobarlo intentar resolver el binomio.

$$(2a + 4b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(4b) + (4b)^2 = 4a^2 + 16ab + b^2$$

Ejemplo

Factorizar $4x^2 - 12xy + 9y^2$

Esta expresión es un trinomio cuadrado perfecto. Como la raíz cuadrada de $4x^2$ es $2x$, y la raíz cuadrada de $9y^2$ es $3y$, se tiene que

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$$

Factorización de un trinomio de segundo grado

El polinomio que se va a factorizar es de la forma:

$$Ax^2 + Bx + C$$

Nota: La expresión anterior es un trinomio de segundo grado, pero no es un trinomio cuadrado perfecto.

Un ejemplo es factorizar la expresión:

$$6x^2 + 5x - 6$$

Pasos a seguir:

1. Determinar los coeficientes numéricos.

$$A = 6 \qquad B = 5 \qquad C = -6$$

2. Encontrar dos números A, C cuyo producto sea igual a -36 y cuya suma B sea igual a 5.
   Para agilizar la búsqueda de esos dos números, es necesario descomponer el número -36 en factores, como:

$$-36 = (9)(-4) = (-9)(4) = (6)(-6)$$

3. Cuando se tengan los factores, sumarlos, encontrando dos números que cumplan las condiciones que se piden.

$$9+(-4)=5 \qquad -9+4=-5 \qquad 6+(-6)=0$$

Los números que satisfacen las condiciones son: 9 y –4.

4. Tomar el término que se encuentra en medio del polinomio (B)

$$6x^2 + 5x - 6$$

En este caso es el número $5x$.

Ahora escribir este término como la suma de los dos números encontrados.

$$5x = 9x - 4x$$

5. Sustituir en la fórmula original.

$$6x^2 + 9x - 4x - 6$$

6. Factorizar por agrupamiento.

Nota: recordar que la factorización por agrupamiento implica determinar un factor común.

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3) \qquad - 4x - 6 = - 2(2x + 3)$$
$$3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$$

Obtuvimos dos términos con un factor común, que es: $(2x+3)$.

7. Factorizar multiplicando el término común por los no comunes.

$$(2x + 3)(3x - 2)$$

Ejemplo

Factorizar $6x^2 +19x + 10$

$$ac = 60 \qquad b = 19$$

$$(15)(4) = 60 \qquad 15 + 4 = 19$$

$19x = 15x + 4x$
$6x^2 + 15x + 4x + 10$
$6x^2 + 15x = 3x(2x + 5)$
$4x + 10 = 2(2x + 5)$
$6x^2 + 19x + 10 = (3x + 2)(2x + 5)$

Método de completar cuadrados

Se trata de una técnica donde debe observarse el término medio en un polinomio de la forma $ax^2 + bx^2y^2 + cy^2$, de tal forma que puede ser transformado para obtener un polinomio que sea un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo

Factorizar $9x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4$

Solución:

Si el término medio fuera $12x^2y^2$ en lugar de $8x^2y^2$, entonces el polinomio sería un cuadrado perfecto $(3x^2 + 2y^2)^2$. Esto sugiere realizar la operación de sumar y restar $4x^2y^2$ para la obtención de una factorización. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 9x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 &= 9x^4 + 8x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (9x^4 + 12x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2 \\ &= (3x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (3x^2 + 2y^2 + 2xy)(3x^2 + 2y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Efectuar el producto

$$(x + 1)^2(x - 1)^2$$

Factorizar:

2. $9x^3 - 729xy^2$

3. $x^2 + 125$

4. $4x^2 - 8x - 32$

5. $78x^2y + 117xy^3$

6. $x^6 - y^9$

7. $2xy^5 - 32xy$

8. ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

a) $(x+y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
b) $(x+y)^5 = x^5 - 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
c) $(x-y)^3 = x^3 - y^3$
d) ninguna de las anteriores

9. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la correcta?

a) $500^2 - 400^2 = (9)(10^3)$
b) $12000^2 - (-13000)^2 = (-2.5)(10^6)$
c) $88^2 - 87^2 = 175$
d) $196(25)^2 - 169(25)^2 = 675$

Factorizar hasta donde sea posible:

10. $y2 + 3y + 2$
11. $x^2 - 6x + 8$
12. $w^2 - 2w - 35$
13. $x^2 + 7x + 6$
14. $x^2 + x + 1$
15. $x^2 + 3x^2 + 4$
16. $x^2 - 25$
17. $0.09y^2 - 100$
18. $81x^2 - 49$
19. $x^2 + 4$
20. $x^2 + 14x + 49$
21. $x^2 - 16x + 64$
22. $27x^2 - 6x - 8$
23. $3x^2y - xy^2$
24. $16x^2 - 8x$
25. $y^4 + 3y^3 + y^2$
26. $2x^2s^2 + x^2s - 10x^2$
27. $24x^2 + 6x - 45$
28. $3x^2 + 24x + 48$
29. $0.3x^2 - 7.5$
30. $12x^2z^2 + 10x^2yz - 12x^2y^2$
31. $14y^4 - 7y^3 - 21y^2$
32. $4x^2 + 8x + 4$
33. $50x^2y^2 - 50xy + 1$

34. $0.16q^2 + 0.8q + 1$
35. $0.0009x^2 - 0.03x + 0.25$
36. $2x^2 + 7x - 15$
37. $3y^2 - 8y - 3$
38. $12x^2 - 11x - 15$
39. $12x^2 - 7x - 12$
40. $3y^2 + 10y + 3$
41. $2x^2 + 2x + 3$
42. $4x^2 + x - 21$
43. $-6ax + 2ya$
44. $2bz - 4bw + 6zb$
45. $2x^2 - 9x - 5$
46. $3y^2 + 7y - 6$
47. $12x^2 + 32x + 5$
48. $16a^8 - 7a^6 + 6a^7$
49. $9 - 25y^2$
50. $\frac{1}{36}y^2 - \frac{1}{49}x^2$
51. $18x^2 + 9zvw + v^2w^2$
52. $12y^4 + 11y^3 - 15y^2$
53. $15x^2 + 11x^3 - 12x^4$
54. $x(x-1) + y(x-1)$
55. $(x-1)^2y - (x-1)^2z$
56. $(x+1)(x-1) - (x+1)(x+2)$
57. $(x+y)x^3 - (2x-y)\,x^3$
58. $2x - 2y + xz - yz$
59. $ac + bc + ad + bd$
60. $a^6b^6 - b^6a^2$
61. $y^3 - 8x^3$
62. $(3x-1)^2 - 100z^8$
63. $4y^4 - (x-y)^2$
64. $(a+b)^3 - 6$
65. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$
66. $ac + bd - ad - bc$
67. $a^4 + 2a^2b^2 + ab^4$

Capítulo 5

Fracciones y fracciones parciales

Definiciones

Las fracciones son llamadas también expresiones racionales por su semejanza con los números racionales que son cociente de dos números enteros a y b con b diferente de cero.

$$\frac{a}{b} \quad \text{con} \quad b \neq 0$$

Una expresión racional o fracción es aquella que puede ser escrita en la forma

$$\frac{P}{Q}$$

donde, tanto P como Q son polinomios y Q es diferente de cero.

Tres ejemplos de expresiones racionales:

a) $$\frac{2x^3}{15}$$

b) $$\frac{2r^2}{r^2-5r+6}$$

c) $$\frac{-3t^3+4t^2-7t}{5t-9}$$

Las fracciones toman valores según los que adopte la variable de la expresión. En las expresiones anteriores si la x toma valor de -1, el valor de cada una se obtiene:

a) $$\frac{2\cdot(-1)^3}{15}=\frac{2\cdot(-1)}{15}=\frac{-2}{15}$$

b) $$\frac{2\cdot(-1)^2}{(-1)^2-5\cdot(-1)+6}=\frac{2\cdot(1)}{1-5\cdot(-1)+6}=\frac{2}{1+5+6}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

c) $$\frac{-3\cdot(-1)^3+4\cdot(-1)^2-7\cdot(-1)}{5\cdot(-1)-9}=\frac{-3\cdot(-1)+4\cdot(1)-7\cdot(-1)}{5\cdot(-1)-9}=\frac{3+4+7}{-5-9}=\frac{14}{-14}=-1$$

La primera expresión no genera problemas pues cualquiera que sea el valor de la variable el denominador es distinto de cero. En la segunda expresión existen dos posibilidades de tener denominador cero, cuando la variable adopte los valores dos o tres, por lo que la expresión solamente es válida cuando la variable toma algún valor diferente a los mencionados. En la tercera expresión solamente hay un valor que haría cero el denominador 9/5, por lo que la variable tendrá que ser diferente de dicho valor.

Con estos tres ejemplos es posible subrayar reglas o principios de las operaciones algebraicas:

1) La división entre cero no está definida.

2) Al sustituir valores es necesario que primero se obtengan las potencias de la expresión, como sucedió con los cuadrados y los cubos anteriores. Las potencias se efectúan primero.

3) La segunda operación interna es la multiplicación de pares. La regla de los signos es importante en las potencias anteriores y en los pares de números que se multipliquen. Las multiplicaciones se efectúan en segundo lugar.

4) La tercera operación es sumar los resultados parciales en el numerador y en el denominador.

5) El resultado final puede simplificarse cuando numerador y denominador tengan común denominador diferente de 1 o –1.

Ejercicios

Encontrar el valor de las siguientes expresiones cuando $x=2$ y cuando $y=-2$.

1) $\dfrac{x+5}{x+2}$ 2) $\dfrac{x+6}{3x-5}$ 3) $\dfrac{y-3}{y-5}$

4) $\dfrac{y^2+5y-3}{y^2-y+4}$ 5) $\dfrac{y}{y^3+5}$

Encuentra los valores de la variable para los cuales la expresión racional no está definida

6) $\dfrac{m+3}{m+2}$ 7) $\dfrac{5n+1}{n-3}$ 8) $\dfrac{4p^2+9}{2p-8}$

9) $\dfrac{3q^2+2}{q^3+6}$ 10) $\dfrac{r^2+r-12}{r^2+5}$

Simplificar fracciones

Existe un principio fundamental de las expresiones racionales: si P/Q es una expresión racional y R es un polinomio distinto de cero, este polinomio se puede usar para modificar la expresión sin alterar el valor de la misma. Entonces,

$$\frac{P \cdot R}{Q \cdot R} = \frac{P}{Q} \qquad \text{y} \qquad \frac{P \div R}{Q \div R} = \frac{P}{Q} \quad \text{con} \quad R \neq 0$$

El mayor uso que se le puede dar a este principio es el de modificar para simplificar. De la misma manera como se transforman las fracciones numéricas se transforman las expresiones racionales.

Para simplificar la expresión racional

d) $$\frac{x^2-4}{x^2-x+6}$$

se pueden usar los productos notables para establecer una diferente expresión en el numerador y en el denominador que tengan en común algún factor. El uso de factores y de productos notables es primordial para fines de factorización y simplificación.

$$\frac{x^2-4}{x^2-x+6}=\frac{(x-2)\,(x+2)}{(x+2)\,(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}$$

En la expresión

e) $$\frac{25x^2y^3}{5x^6y^3}$$

la descomposición en factores es más simple

$$\frac{25x^2y^3}{5x^6y^3}=\frac{5\cdot 5\cdot x^2\cdot y^3}{5\cdot x^2\cdot x^4\cdot y^3}=\frac{5}{x^4}$$

Para la expresión siguiente

f) $$\frac{2m-4}{m^4-2m^3}$$

se pueden sacar el factor común en el numerador y el factor común en el denominador y simplificar

$$\frac{2m-4}{m^4-2m^3}=\frac{2\cdot(m-2)}{m^3\cdot(m-2)}=\frac{2}{m^3}$$

En otro tipo de expresiones existen varias variables

g) $$\frac{2a^2-2ab+3a-3b}{2a+3}$$

en estos casos se puede agrupar el numerador, factorizar y simplificar con el denominador

$$\frac{2a^2-2ab+3a-3b}{2a+3}=\frac{2a(a-b)+3(a-b)}{2a+3}=$$

$$=\frac{(2a+3)\,(a-b)}{2a+3}=\frac{(a-b)}{1}=(a-b)$$

Con estas propuestas se puede resolver un gran número de expresiones racionales.

Ejercicios

Simplificar las siguientes expresiones racionales

11) $\dfrac{m+5}{m^2-4m-45}$ 12) $\dfrac{5m^2+11m+2}{m+2}$ 13) $\dfrac{x^2-x-12}{2x^2-5x-3}$

14) $\dfrac{x^2+xy+2x+2y}{x+2}$ 15) $\dfrac{ab+ac+b^2+bc}{b+c}$ 16) $\dfrac{5x+15-xy-3y}{2x+6}$

17) $\dfrac{2m^2+3m-2}{2m-1}$ 18) $\dfrac{m^2-1}{m^2-2m+1}$ 19) $\dfrac{x^2-16}{x^2-8x+16}$

20) $\dfrac{-4x^2+8x-4}{2x^2-2}$

Multiplicación y división con expresiones racionales

De la misma forma en que las fracciones se simplifican como las fracciones numéricas, las fracciones se multiplican y dividen con las reglas de multiplicación y división de las fracciones numéricas.

Para multiplicar expresiones racionales donde P, Q, R, y S son polinomios con Q y S distintos de cero, sucede que:

$$\frac{P}{Q} * \frac{R}{S} = \frac{P * R}{Q * S}$$

De esta manera es sencillo manejar expresiones como:

h) $$\frac{2x}{9} * \frac{5}{y^2}$$

i) $$\frac{8x^2}{3y} * \frac{6y^3}{4x^2}$$

j) $$\frac{x^2+x}{3x} * \frac{6}{5x+5}$$

En los tres casos es necesario hacer la multiplicación de numeradores, la multiplicación de denominadores y simplificar los resultados.

h) $$\frac{2x}{9} * \frac{5}{y^2} = \frac{2x*5}{9*y^2} = \frac{10x}{9y^2}$$

i) $$\frac{8x^2}{3y} * \frac{6y^3}{4x^2} = \frac{8x^2*6y^3}{3y*4x^2} = \frac{48x^2y^3}{12x^2y} = \frac{4*12*x^2*y*y^2}{12*x^2*y} = \frac{4y^2}{1} 4y^2$$

j) $$\frac{x^2+x}{3x} * \frac{6}{5x+5} = \frac{(x^2+x)*6}{3x*(5x+5)} = \frac{6x^2+6x}{15x^2+15x} = \frac{6(x^2+x)}{15(x^2+x)} = \frac{6}{15}$$

De la misma manera, la división de expresiones racionales es análoga a la de fracciones numéricas: para dividir expresiones racionales donde *P, Q, R,* y *S* son polinomios con *Q, R* y *S* distintos de cero, sucede que:

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P*S}{Q*R}$$

Los siguientes ejemplos resultarán ilustrativos:

k) $$\frac{2x}{9} \div \frac{5}{y^2}$$

l) $$\frac{8x^2}{3y} \div \frac{6y^3}{4x^2}$$

m) $$\frac{x^2+x}{3x} \div \frac{6}{5x+5}$$

En los tres casos es necesario hacer la multiplicación de numerador por denominador, la multiplicación de denominador por numerador y simplificar los resultados.

k) $\frac{2x}{9} \div \frac{5}{y^2} = \frac{2x * y^2}{9 * 5} = \frac{2xy^2}{45}$

l) $\frac{8x^2}{3y} \div \frac{6y^3}{4x^2} = \frac{8x^2 * 4x^2}{3y * 6y^3} = \frac{32\,x^4}{18\,y^4} = \frac{2 * 16 * x^4}{2 * 9 * y^4} = \frac{16\,x^4}{9\,y^4}$

m) $\frac{x^2+x}{3x} \div \frac{6}{5x+5} = \frac{(x^2+x)*(5x+5)}{3x*6} = \frac{5x^3+5x^2+5x^2+5x}{18x} = \frac{5(x^3+x^2+x^2+x)}{18x} =$

$= \frac{5 * x * (x^2+2x+1)}{18 * x} = \frac{5 * (x^2+2x+1)}{18} = 5/18\,(x^2+2x+1)$

Ejercicios

Realizar las siguientes operaciones:

1) $\frac{a}{a+b} * \frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$

2) $\frac{p^2-36}{p^2-4p-12} * \frac{p+2}{p}$

3) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-4} \bullet \frac{x+3}{x-2}$

4) $\frac{(m-6)(m+4)}{4m}$

5) $\frac{r^2+7r+10}{1-r} * \frac{r-1}{r^2+2r-15}$

6) $\frac{7}{6m^2+n} \div \frac{14}{18m^2+3n}$

7) $\frac{3x+4y}{x^2+4xy+4y^2} \div \frac{2}{x+2y}$

8) $\frac{p^2-4}{2q} \div \frac{2-p}{6pq}$

9) $(r+3) \div \frac{r^2-10r+21}{7-r}$

10) $\frac{p^2+3p-18}{p} \div (3-p)$

Fracciones parciales

Toda expresión algebraica racional se puede expresar como suma de expresiones racionales más simples. Por ejemplo, cuando se evalúan integrales de funciones racionales, es necesario descomponer la expresión racional en fracciones componentes más fáciles de integrar, llamadas fracciones parciales.

Ejemplo:

$$\frac{7x+12}{x\,(x+4)} \quad \text{se descompone como:} \quad \frac{3}{x}+\frac{4}{(x+4)}$$

Reglas que hay que seguir

1. El método de las fracciones parciales es adecuado únicamente para fracciones propias, es decir, aquéllas en las que el polinomio del numerador es de menor grado que el polinomio del denominador.
2. El denominador debe ser factorizado de modo que los factores sean factores lineales o factores cuadráticos con coeficientes reales.
3. La fracción no siempre puede descomponerse en fracciones parciales. Esto depende de la naturaleza de los factores que aparezcan en el denominador.

El método consta de los siguientes pasos:

I) Se expresa el denominador de la fracción como un producto de factores lineales de la forma
$ax + b$, y de factores cuadráticos irreducibles de la forma $ax^2 + bx + c$. Esto en la práctica no siempre es fácil, pero en teoría es posible para cualquier polinomio en x con coeficientes reales.

II) Se determina la forma de las fracciones parciales. Según la naturaleza de los factores en el denominador, se consideran cuatro casos de descomposición en fracciones parciales: factores lineales no repetidos, factores lineales repetidos, factores cuadráticos no repetidos y factores cuadráticos repetidos.

Nota: la palabra "irreducible" significa que la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ no es factorizable dentro del conjunto de los números reales. Esto ocurre cuando $b^2 - 4ac < 0$

Denominadores que contienen factores lineales

Caso I: ***Factores lineales no repetidos***

En la siguiente expresión racional, con polinomio *P(x)* en el numerador y *Q(x)* en el denominador, se tiene que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ldots (a_nx + b_n)}$$

considerando que todos los factores $a_i x + b_i$ para $i = 1,\ldots, n$ son distintos y el grado de *P(x)* es menor que *n*, el grado de $Q(x)$, entonces existen constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Ejemplo

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+3}$$

Combinando los términos a la derecha de la ecuación con un denominador común

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1(x+3) + A_2(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

Como los denominadores son idénticos en ambos miembros de la ecuación, entonces, también lo son los numeradores, esto es:

$$1 = A_1(x+3) + A_2(x+1)$$
$$1 = A_1x + 3A_1 + A_2x + A_2$$
$$1 = A_1x + A_2x + 3A_1 + A_2$$
$$1 = (A_1 + A_2)x + (3A_1 + A_2)$$

observando que los coeficientes de las potencias de x son iguales y considerando que $P(x) = 0x + 1$

$$0 = A_1 + A_2$$
$$1 = 3A_1 + A_2$$

se resuelven estas ecuaciones simultáneas para A_1 y A_2 obteniendo los siguientes resultados:

$$A_1 = ½ \qquad A_2 = -½$$

de modo que la expresión racional queda planteada como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+3}$$

Caso II: ***Factores lineales repetidos***

Se tiene la expresión racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax+b)^n}$$

En donde $n > 1$ y el grado de $P(x)$ es menor que n, entonces se pueden encontrar constantes reales únicas A_1, A_2, ..., A_n , quedando descompuesta la expresión como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{ax+b}$$

Ejemplo

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}$$

Al sacar un denominador común en el segundo miembro de la ecuación

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3}{(x+1)^3}$$

Como los denominadores son iguales en ambos lados de la ecuación, entonces, también coinciden los numeradores:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 4 &= A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3 \\ &= A_1x^2 + (2A_1 + A_2)x + (A_1 + A_2 + A_3) \end{aligned}$$

obteniéndose el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 \\ 2 &= 2A_1 + A_2 \\ 4 &= A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}$$

al resolver las ecuaciones se tiene que

$$A_1 = 1,\ A_2 = 0,\ A_3 = 3$$

Quedando las siguientes fracciones parciales

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3}$$

Denominadores que contienen factores cuadráticos

Caso III: ***Factores cuadráticos no repetidos***

En el caso que el denominador de la función racional $P(x) / Q(x)$ puede expresarse como un producto de factores cuadráticos irreducibles diferentes $ax^2 + bx + c$, para $i = 1, \ldots, n$ tales que: el grado de $P(x)$ es menor que $2n$, es factible hallar las constantes únicas A_i y B_i tales que:

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x + b_2x + c_2) \ldots (a_nx^2 + b_nx + c_n)} =$$

$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_1x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}$$

Ejemplo

Descomponer en fracciones parciales.

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + 2x + 3}$$

De donde se obtiene que

$4x = (A_1x + B_1)(x^2 + 2x + 3) + (A_2x + B_2)(x^2 + 1)$

$4x = (A_1 + A_2)x^3 + (2A_1 + B_1 + B_2)x^2 + (3A_1 + 2B_1 + A_2)x + (3B_1 + B_2)$

igualando los coeficientes de las potencias de x se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2 \\ 0 &= 2A_1 + B_1 + B_2 \\ 4 &= 3A_1 + 2B_1 + A_2 \\ 0 &= 3B_1 + B_2 \end{aligned}$$

ya resuelto el sistema de ecuaciones nos queda (consultar cap. IX)

$$A_1 = 1,\ B_1 = 1,\ A_2 = -1,\ B_2 = -3$$

la expresión original queda descompuesta en las fracciones parciales:

$$\frac{4x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+3\right)} = \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{-x-3}{x^2+2x+3}$$

Caso IV: ***Factores cuadráticos repetidos***

Es cuando el denominador toma la forma $(ax + bx + c)^n$, donde $ax + bx + c$ es irreducible y $n > 1$. Cuando el grado de $P(x)$ es menor que $2n$, puede encontrarse constantes únicas A_i y B_i, quedando la función racional descompuesta de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ejemplo

Descomponer la expresión racional en fracciones parciales.

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+4} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+4)^2}$$

Al efectuar la suma de fracciones e igualar los numeradores, se tiene

$$x^2 = (A_1x + B_1)(x^2 + 4) + A_2x + B_2$$
$$x^2 = A_1x^3 + B_1x^2 + (4A_1 + A_2)x + (4B_1 + B_2)$$

Al igualar los coeficientes, se determina que

$$0 = A_1$$
$$1 = B_1$$
$$0 = 4A_1 + A_2$$
$$0 = 4B_1 + B_2$$

y al resolver el sistema de ecuaciones se tiene

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = -4$$

por lo que la expresión racional queda dividida en las fracciones parciales:

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^2}$$

Ejercicios

Descomponer en fracciones parciales

1. $\frac{3x-1}{x^2(x+1)}$ 2. $\frac{x+1}{x^2(x^2+9)}$ 3. $\frac{x^3-2x}{x^4-81}$

4. $\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}$ 5. $\frac{x+3}{x^2+3x+2}$ 6. $\frac{x+3}{x^4+9x^2}$

7. $\frac{x^2-3x-8}{x^2-2x+1}$ 8. $\frac{x}{x^4+6x^2+5}$

9. $\frac{1}{x\,(x^2+1)}$ 10. $\frac{1}{x^3+5x^2+4}$

Capítulo 6

Logaritmos y funciones logarítmicas

Así como la resta es la operación inversa a la suma y la división lo es a la multiplicación, pues son operaciones que deshacen lo que las otras hicieron, así también en una operación inversa a la exponenciación aparece la operación conocida como logaritmo. El logaritmo fue introducido por John Napier (1550-1617), y se define así: el logaritmo de x base a es el exponente al que debe elevarse a para obtener x. El logaritmo es una operación que le asocia a la pareja (a, x) un número que es el exponente al que se eleva a para obtener x. Es más fácil entender la relación entre la exponenciación y el logaritmo a partir de algunos ejemplos:

Ejemplos

a) Como $2^4 = 16$, entonces el logaritmo base 2 de 16 es 4, que se indica como $\log_2(16) = 4$.

b) Si $3^2 = 9$, entonces $\log_3 (9) = 2$.

c) Si $10^3 = 1000$, entonces $\log_{10} (1000) = 3$

d) Si $2^5 = 32$, entonces $\log_2 (32) = 5$

e) Si $4^{-2} = 1/4^2 = 1/16$, $\log_4 (1/16) = -2$

f) Como $10^0 = 1$, pero también $5^0 = 1$, $3^0 = 1$, etcétera, el logaritmo de 1 en cualquier base es 0.

Ejercicio

Transforma a notación de logaritmos las siguientes expresiones:

1) $2^7 = 128$
2) $3^4 = 81$
3) $10^1 = 10$
4) $5^2 = 25$
5) $6^3 = 216$

Es importante subrayar que no todos los algoritmos deben ser enteros, la mayor parte de ellos tienen una parte entera y otra decimal. En cambio, la base siempre debe ser mayor que cero, así como x; esto es, a partir de la definición de logaritmo es fácil deducir que sólo está definido para números positivos, pues una potencia de un número positivo nunca puede resultar negativa.

Funciones logarítmicas y sus gráficas

A partir del logaritmo se define la *función logarítmica* que asocia a cada real positivo su logaritmo :

$$l: x \rightarrow \log x$$

Si a es un real positivo distinto de 1, entonces la función $\{(x, y) | \ y = \log_a x \, , \, x > 0\}$ es una función logarítmica de base a.

Si se considera la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$ donde a es una constante positiva, entonces la función logarítmica $l(x) = \log_a (x)$ es la función inversa correspondiente (f^{-1}), de donde, las funciones $x = a^y$ y $y = \log_a x$ son inversas.

Ejemplos

a) $\log_{10} 100 = 2$ significa que $10^2 = 100$
b) $\log_5 625 = 4$ significa que $5^4 = 625$
c) $\log_2 (1/2) = -1$ significa que $2^{-1} = 1/2$
d) $\log_a 1 = 0$ equivale a $a^0 = 1$
f) $\log_3 (3^7) = 7$
g) $18^{\log_{18}(25)} = 25$

Propiedades de las funciones logarítmicas:

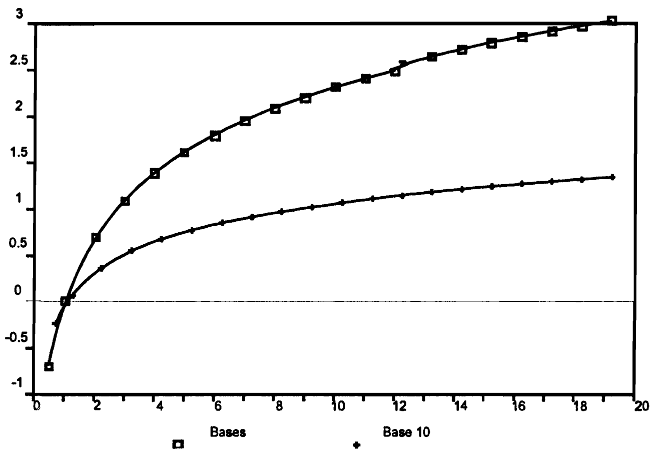
- Es importante notar que el dominio de cualquier función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos.
- La imagen de una función logarítmica base $a > 1$ es la totalidad de los números reales. Si $0 < x < 1$, entonces $\log_a x < 0$; si $x = 1$, $\log_a x = 0$, cuando $x > 1$, entonces $\log_a x > 0$.
- Si r y s son números realês positivos, entonces $\log_a r < \log_a s$ si y sólo si $r < s$. Esto es, la función logarítmica es una función creciente.

- El logaritmo de un número base él mismo es 1.
- El único punto donde se anula la función logarítmica es $x = 1$.

Estas propiedades se hacen evidentes al trazar la gráfica de diversas funciones logarítmicas:

Figura 1

Funciones logarítmicas



Leyes de los logaritmos

Puesto que $\log_a x = y$, si y sólo si $a^y = x$, es razonable esperar que las leyes de los exponentes se trasladen al lenguaje de los logaritmos:

- Para cualesquiera números reales positivos u, v y a, con $a \neq 1$, se tiene:

$$\log_a uv = \log_a u + \log_a v$$

Si $\log_a u = r$ y $\log_a v = s$ entonces por la definición de los logaritmos se tiene que

$$u = a^r, \quad v = a^s, \quad uv = a^{r+s} \Rightarrow \log_a(uv) = r + s = \log_a(u) + \log_a(v)$$

- Para cualesquiera números reales positivos con u, v, a con $v \neq 0$ y $a \neq 1$, se tiene que

$$\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

Si $\log_a(u) = r$ y $\log_a(v) = s$, entonces por la definición de los logaritmos se tiene

$$= a^r, \quad v = a^s, \quad \frac{u}{v} = a^{r-s} \Rightarrow \log_a(\frac{u}{v}) = r - s = \log_a(u) - \log_a(v)$$

- Para cualesquiera número reales positivos u, a y n, con $a \neq 1$ se tiene que:

$$log_a(u^n) = n \log_a(u)$$

Si $\log_a(u) = r, \quad u = a^r, \quad u^n = a^{nr} \Rightarrow \log_a(u^n) = nr = n\log_a(u)$

Ejemplos

a) Si $\log_a(4) = 0.60$ y $\log_a(7) = 0.85$ entonces $\log_a(4)(7) = 0.60 + 0.85 = 1.45$
b) Si $\log_a(2) = 0.69$ y $\log_a(3) = 1.10$ entonces $\log_a(2/9) = \log_a(2) - \log_a(3^2) = 0.69 - 2(1.10) = -1.51$.
c) $og_a(\sqrt[3]{2}) = \log_a(2^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}\log_a(2)$
d) La expresión

$$2\log_a(2) - \log_a(5)$$

Es igual a $\log_a(4/5)$

Ejercicios

1. Representar cada una de las siguientes expresiones como un solo logaritmo con coeficiente 1.

$$\log_a(x^2 - 1) - \log_a(x + 1)$$

$$\log_a(x^2 - 3x + 2) - \log_a(x^2 - 4x + 4)$$

2. Hallar la representación numérica más simple

$$\log_3(54) - \log_3(2)$$

$$\log_a(x) = \log_a(3) - 2\log^2(5)$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones para x en términos de y

$$\log_7(x) - \frac{1}{2}\log_7(y) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[\log_2(x) + \log_2(y)\right] = 1$$

Logaritmos comunes y naturales

Cualquier número positivo distinto de 1 puede utilizarse como base de un sistema de logaritmos, sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones elementales de los logaritmos la base usual es el 10. Los logaritmos base 10 se llaman *logaritmos comunes o decimales.* Cuando se escribe un logaritmo común se omite el subíndice que indica la base. Así $\log(18) = \log_{10}(18)$

Los logaritmos se descubrieron hace 350 años aproximadamente, y desde entonces se usaron para simplificar cálculos numéricos complicados; aunque actualmente esta labor se puede llevar a cabo de modo más eficaz con ayuda de la calculadora o la computadora, los cálculos logarítmicos ayudan a comprender mejor la teoría de los logaritmos.

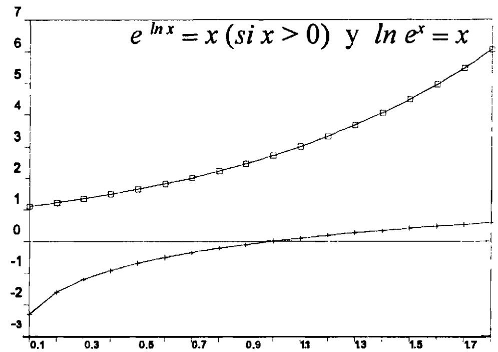
Por ejemplo, el cálculo de la siguiente expresión usando logaritmos se hacía

$$\left[\frac{(0.421)(81.7)}{(574)(621.89)}\right]^5 \quad \text{se calcula } 5\left\{\left[\log(0.421) + \log(81.7)\right] - \left[\log(574) + \log(621.89)\right]\right\}$$

y después se utilizaba la función inversa para desaparecer los logaritmos, es decir, la función exponencial.

Para propósitos teóricos, e^* es el número más importante como base de funciones exponenciales y logarítmicas. La inversa de $y = e^x$, está dada por $x = \log_e(y)$. En lugar de $\log_e(x)$ se escribe $\ln(x)$ y se lee "*logaritmo natural de x*"

Figura 2



Propiedades de la función exponencial $y = e^x$

- Dominio: todos los números reales.
- Rango: toda $y > 0$.
- Es una función creciente.
- La curva es cóncava hacia arriba.
- Es una función uno-uno.
- $0 < e^x < 1$, para $x < 0$; $e^0 = 1$, $e^x > 1$, para $x > 0$.

Propiedades de la función logarítmica $y = ln(x)$

- Dominio: toda $x > 0$
- Rango: todos los números reales
- Es una función creciente.
- La curva es cóncava hacia abajo.
- Es una función uno-uno.
- $ln(x) < 0$ para $0 < x < 1$; $ln\,(1) = 0$; $ln\,(x) > 0$ para $x > 1$.

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2.718$$

Modelos funcionales

Existe una gran variedad de problemas de aplicación relacionados con las funciones exponenciales y logarítmicas. Antes de considerar estas aplicaciones es importante aprender a resolver una ecuación exponencial como $2^x = 35$.

$$ {}^{x} = 35 \Rightarrow ln(2^x) = ln(35) \therefore x\, ln(2) = ln(35) \Rightarrow x = \frac{ln\,(35)}{ln\,(2)} $$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones:

- $4^x = 5$
- $2^{3x} = 10$
- $(1/2)^x = 12$
- $4^{-x} = 15$
- $67^{5x} = 4$

Considérese un cultivo de bacterias que crece con tal rapidez que cada hora el número de bacterias se duplica. En estas condiciones, si inicialmente eran 10 mil bacterias, una 1 hora después ya había 20 mil, dos horas más tarde la población había crecido a 40 mil, entonces parece razonable representar esta función de crecimiento de población de bacterias mediante la ecuación $y = f(x) = (10\,000)2^x$, donde y corresponde al tamaño de la población y x al tiempo. Cuando se desea saber en cuánto tiempo la población de bacterias llega a 100 mil es necesario resolver la ecuación para x; esto es:

$$ (10\,000)2^x = 100\,000,\ 2^x = 10 \therefore x\, ln(2) = ln(10) \Rightarrow x = \frac{ln\,(10)}{ln\,(2)} = 3.32 \text{ horas} $$

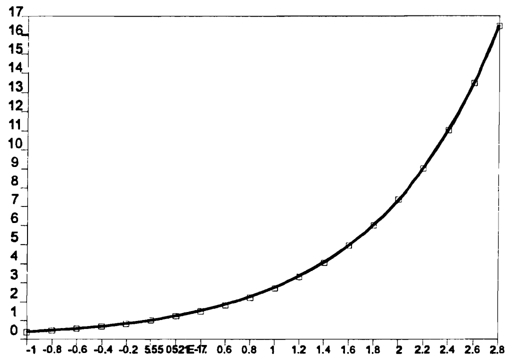
En este ejemplo se usaron funciones exponenciales y logarítmicas para resolver un problema de crecimiento exponencial. Muchos problemas que implican *crecimiento exponencial* o *decrecimiento exponencial* se pueden resolver mediante el modelo:

$$ Q(t) = Q_0\, e^{kt} $$

Ejemplo

Sea $B(t) = Pe^{rt}$ el saldo después de t años de un depósito inicial P que capitaliza continuamente una tasa de interés r.

Figura 3

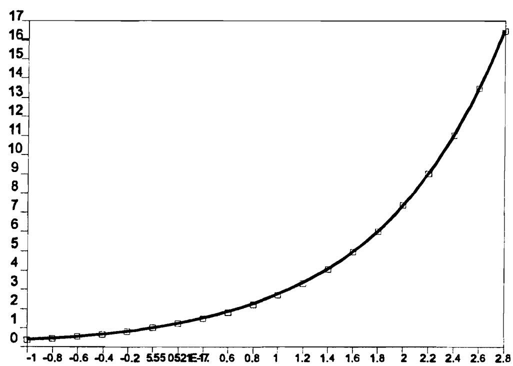


El *decrecimiento exponencial* se representa mediante el modelo

$$Q(t) = Q_0\, e^{-kt}$$

donde k es una constante positiva y Q_0 es el valor inicial $Q(0)$.

Figura 4



Ejemplo

El porcentaje de focos que se funden en menos de t días es aproximadamente

$$f(t) = 1 - e^{-0.03t}$$

Otros modelos exponenciales importantes son:

El de curva de aprendizaje

$$Q(t) = B - a\, e^{-kt}$$

donde B representa el grado de eficiencia máxima, se ha encontrado que estas curvas son apropiadas para representar varias funciones de costo y producción.

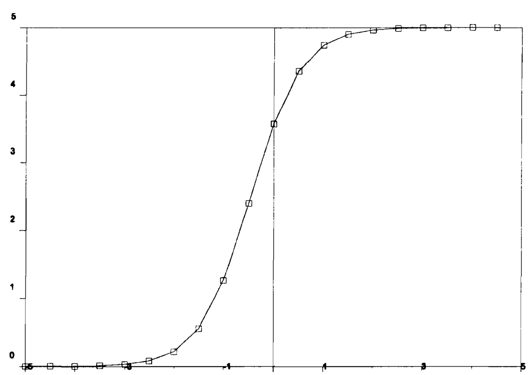
Ejemplo

El ritmo (número de ensambles por hora) al que una empleada puede ensamblar un radio en función del número *t* de meses que esta empleada lleva trabajando:

$$Q(t) = 700 - 400\, e^{-0.5}$$

La *curva logística* o *sigmoidal* también se utiliza para representar el comportamiento del aprendizaje cuando las variables son graficadas contra la edad, aunque tiene, asimismo, otras aplicaciones.

Figura 5



La ecuación de la curva logística es:

$$Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-kt}}$$

con *B*,*A* y *k* constantes positivas.

Ejemplo

El número de personas afectadas por cierta enfermedad contagiosa después de t semanas es:

$$Q(t) = \frac{20}{1+19e^{-1.2t}}$$

Los *modelos logarítmicos* se emplean para determinar cuánto tiempo se requiere para que una cantidad que cambia exponencialmente se duplique o se reduzca a la mitad de su tamaño o para ajustar una curva exponencial a un conjunto de datos, cuando se conocen tan sólo dos valores observados distintos.

Ejemplos

a) ¿Con qué rapidez se duplicará el dinero si se invierte a una tasa de interés anual del 6% capitalizado continuamente?

La forma de interés compuesto con capitalización continua es $B = Pe^{-rt}$

Si se quiere que $B = 2P$ y $r = 0.06$, entonces $2P = Pe^{-0.06t}$de donde $\underline{2P}$ $= e^{-0.06t}$

$ln\ 2 = ln\ (e^{-0.06t})$, luego $ln\ 2 = -0.06t$

$$t = \frac{ln(2)}{-0.06}$$

b) La densidad de población a x kilómetros del centro de la ciudad está dada por una función de la forma $Q(x) = Ae^{-kx}$. Determinar cuál es el valor preciso de los parámetros de la función si se conoce que en el centro de la ciudad habitan 15 mil por kilómetro cuadrado y a 10 kilómetros del centro habitan 9 mil personas por kilómetro cuadrado.

$$Q(0) = 15000 \text{ y } Q(0) = Ae^{-k(o)}$$

$$15000 = Ae^{0}, \text{ luego } 15000 = A,\ Q(10) = 9000 \text{ y } Q(10) = Ae^{-k(10)}$$

$$\frac{9000}{15000} = e^{-10k} \Rightarrow ln(\frac{3}{5}) = ln(e^{-10k}) = -10k \therefore k = \frac{ln(\frac{3}{5})}{-10}$$

Ejercicios

a) Determinar cada uno de los siguientes logaritmos.

1. $\log 100$
2. $ln\ 1$
3. $\log 0.1$
4. ln^{-5}
5. $\log_{36} 6$
6. $\log_x x^5$
7. $\log_a$
8. $\log 10^x$

.$\log_e \sqrt{e}$

10. $\log_5 625$

b) Despejar de cada ecuación el valor de X

1. $\log_2 x = 4$
2. $ln\ (x+1) = 7$
3. $\log_x 49 = 2$
4. $e^{5x} = 4$
5. $12 = 5 + 3(4)^{x-1}$
6. $\log x + \log 3 = \log 5$
7. $\log_5 x = 3$
8. $\log_x (2x-3) = 1$
9. $e^{2x-5} + 1 = 4$
10. $= 4$
11. $ln\ x + ln\ 5 = 10$
12. $x = \sqrt[3]{8^2}$
13. $e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{14}$
14. $(16)^{3x} = 2$
15. $e^{3\ ln\ x} = 8$
16. $10^{\log x2} = 4$
17. $e^{\ln(2x)} = 5$

c) Evaluar

1. $ln\ e^3$
2. $e^{ln\ 3x}$
3. $\log 1 + \log 1000$
4. $2 \log x - \frac{1}{2} \log (x-2)$
5. $a \log 7 + 5 \log 23$
6. $\log_5 (\sqrt[5]{5^5})$

7. $\log_7(\sqrt[9]{7^8})$ 8. $\log 2000$

9. $\log 5^x = \log 2$ 10. $\log 10 + \ln e^3$

d) Resolver los siguientes ejercicios:

1) El costo de fabricación de un cierto producto está dado por el número q de unidades producidas mediante la función: $C = (2q \ln q) + 20$. ¿Cuál será el costo para 5 unidades?

2) La magnitud de respuesta a un nuevo medicamento está dada por la expresión $R = 10^{-t/40}$, donde t es el número de días transcurridos desde el inicio del tratamiento.
a) ¿Cuál es la magnitud de respuesta a los 15 días?
b) ¿Después de cuántos días la magnitud de respuesta es 5?

3) En estadística la ecuación $y = ab^x$ debe ser transformada mediante logaritmos para poder trabajarla con el modelo de regresión lineal. Evalúa $\log y$.

4) Si un obrero logra ensamblar $q = 500\,(1 - e^{-0.2t})$ unidades diarias después de t días de haber ingresado a la producción de cierto producto. ¿A los cuántos días logrará ensamblar 400 unidades?
(Sugerencia: suponga $\ln 0.2 = -1.6$).

5) Se encuentra que el esqueleto de un animal tiene la cuarta parte de la cantidad original de ^{14}C. ¿Qué antigüedad tiene el esqueleto?

(El carbono 14, representado por ^{14}C, es un isótopo radioactivo de dicho elemento, y tiene una vida media de alrededor de 5750 años. Es posible encontrar qué cantidad de ^{14}C contienen los restos de lo que fue un organismo vivo y determinar qué porcentaje representa de la cantidad original de ^{14}C en el momento de su muerte. Una vez que se tiene esta información, la fórmula $y = Ae^{kx}$ permite calcular la antigüedad de los restos. La fecha correspondiente se obtiene al resolver la ecuación para la constante k. Dado que la cantidad de ^{14}C después de 5750 años será $A/2 = Ae^{5750k}$, $5750k = ln(1/2)$ y $k = ln(0.5)/5750$, entonces la ecuación queda $y = Ae^{(ln0.5/5750)x}$, esta ecuación permite calcular la cantidad residual de carbono 14 después de x años.)

Capítulo 7

Sistemas de ecuaciones lineales

Cuando se desea conocer los valores de las variables que satisfacen una colección de condiciones expresadas mediante ecuaciones lineales, se dice que se desea resolver un *sistema de ecuaciones lineales simultáneas*.

Hay muchos problemas expuestos en lenguaje común que se pueden resolver por medio de sistemas lineales. Cuando se pretende resolver un problema de este tipo, se parte de la expresión verbal y se tiene que traducir a la expresión algebraica. En realidad, esta traducción es la parte más difícil, debido a que no existen métodos determinados de interpretación que se apliquen a todas las situaciones; es enorme la variedad de problemas y numerosas las maneras de expresar cada problema. En esta sección se presentan diversos métodos para resolver un sistema lineal de ecuaciones simultáneas ya planteadas.

Sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

se llama ecuación lineal de n variables, los coeficientes a_i i = 1,..., n, son números reales, de la misma manera que las variables. El conjunto de n-adas $(x_1,..., x_n)$ que satisfacen la ecuación se llama *conjunto solución*.

Ejemplo

La ecuación $2x - 3y - 5 = 0$ es una ecuación lineal, el punto (1, 1) no está en el conjunto solución porque no satisface la ecuación $2(1) - 3(1) - 5 \neq 0$, en cambio $(1, -1)$ sí la satisface puesto que $2(1) - 3(-1) - 5 = 0$.

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas se llama *sistema lineal de ecuaciones*. El conjunto solución de este sistema es el conjunto de n-adas ordenadas que satisfacen las m ecuaciones simultáneamente.

Ejemplo

$$\begin{aligned} &3x + y + z - 5 = 0 \\ &x - 2y + z = 0 \end{aligned}$$

Es un sistema lineal con dos ecuaciones y tres variables, el punto (1, 1, 1) es una solución puesto que al sustituir $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ en las ecuaciones, éstas se satisfacen, en cambio (2, 1, 0) satisface la segunda ecuación pero no la primera, entonces no es solución del sistema.

Cuando dos sistemas tienen exactamente el mismo conjunto solución se dice que son equivalentes.

El proceso de encontrar la solución de un sistema se conoce como *resolv*er *simultáneamente.* Esto se realiza, generalmente, escribiendo una serie de sistemas equivalentes en donde el último sistema tiene una solución inmediata.

Ecuaciones lineales simultáneas con dos variables

Una expresión general de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables es

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \; con \; a_1 \neq 0 \text{ o } b_1 \;\; 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \; con \; a_2 \neq 0 \text{ o } b_2 \;\; 0$$

Cuando se tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se observa que el conjunto solución corresponde a uno de los siguientes casos: consta de un solo punto, es decir, tiene solución única; tiene infinidad de puntos; o es vacío.

Cuando un sistema tiene solución se llama *consistente,* en caso contrario el sistema se llama *inconsistente.*

A continuación se presentan varios métodos para resolver este tipo de sistemas

Método gráfico

El método gráfico consiste en dibujar las rectas correspondientes a las ecuaciones lineales y encontrar en ellas los puntos comunes que serán los que resuelvan el sistema simultáneo.

Para dibujar las rectas *es suficiente* encontrar dos puntos que las satisfagan, basta con encontrar las intersecciones con los ejes, esto es, si $x = 0$, cuánto vale y, y si $y = 0$ cuánto vale x. Una vez trazadas se encuentran las coordenadas del punto de intersección cuando éste existe.

Ejemplo

Sean las ecuaciones:

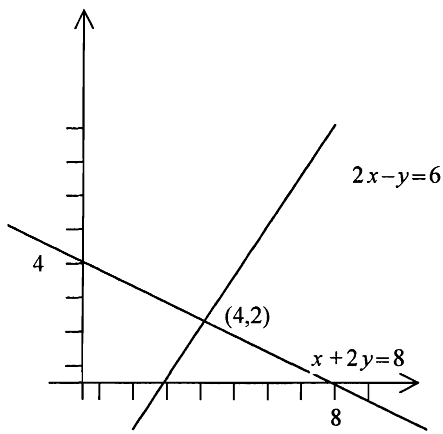
$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Se representan cada una de estas ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas; la solución será el punto (x, y) de intersección de las dos rectas.

Para la primera recta si $y = 0$, $x = 6/2 = 3$, el punto (3, 0) está en la recta. Cuando $x = 0$, $y = -6$, entonces la recta también pasa por (0, –6). De la misma manera la segunda recta pasa por (8, 0) y (0, 4).

Cuando las rectas no son paralelas el sistema siempre tiene solución única, este sistema además de ser *consistente* es *independiente*.

Figura 6



Como se observa en la figura 6 el punto de intersección es el (4,2) que es la solución al sistema de ecuaciones.

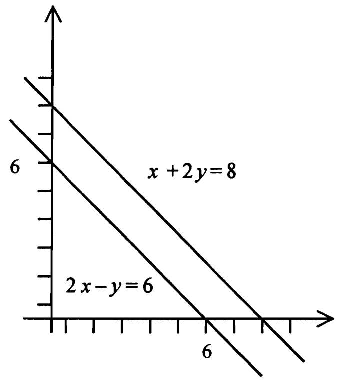
A continuación se presenta un ejemplo del caso en el que no existe solución del sistema, esto sucede cuando las rectas no se intersectan, es decir, cuando las rectas son paralelas.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Como se observa $x + y$ no puede ser igual a 6 y a 8 a la vez, por lo tanto el sistema no tiene solución; entonces el sistema es *inconsistente*, geométricamente las dos rectas son paralelas (figura 7).

Figura 7



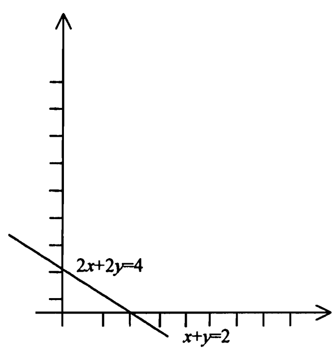
Asimismo, se tiene el caso en el que sistema no tiene solución única, sino un número infinito de soluciones. Las rectas son coincidentes, todos los puntos sobre ellas son soluciones. Este sistema es *consistente* y *dependiente*.

Sea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Como se observa, en este sistema no hay dos ecuaciones diferentes, sino una sola, ya que si multiplicamos por 2 la primera ecuación resulta la segunda.

Figura 8



Otros métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales

Método de eliminación por adición o sustracción

Se elimina una de las incógnitas y, si es necesario, para lograrlo las ecuaciones se multiplican las ecuaciones por números tales que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones resultantes sean iguales. Luego se suman o se restan las ecuaciones de acuerdo a los signos de los coeficientes iguales.

Ejemplo

Sea el sistema:

$$2x - y = 6 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 8 \qquad (2)$$

Se multiplica por (–2) la segunda ecuación y se suma a la primera.

$$\begin{array}{rl} 2x - y = & 6 \\ -2x - 4y = & -16 \\ \hline -5y = & -10 \end{array}$$

$$\boxed{y = 2}$$

Se sustituye $y = 2$ en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de x

$$\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ 2x - 2 &= 6 \\ 2x &= 8 \\ \boxed{x = 4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución al sistema es el par ordenado (4,2).

Método de eliminación por sustitución

Este método consiste en eliminar una de las variables, despejándola en cualquiera de las ecuaciones y sustituyéndola en la otra.

Ejemplo

El sistema del ejemplo anterior se utiliza para ilustrar este método:

$$2x - y = 6 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 8 \qquad (2)$$

Se despeja x en la segunda ecuación y se sustituye el valor en la primera ecuación

$$\begin{aligned}
x &= 8-2y \\
2\,(8-2y)-y &= 6 \\
16-4y-y &= 6 \\
-5y &= 6-16 \\
y &= \frac{-10}{-5} \\
&\boxed{y=2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $y=2$ en cualquiera de las ecuaciones se obtiene el valor de x

$$\begin{aligned}
2x-y &= 6 \\
2x-2 &= 6 \\
2x &= 6+2 \\
x &= \frac{8}{2} \\
&\boxed{x=4}
\end{aligned}$$

Que es la misma solución (4,2) encontrada por el método anterior.

Método de eliminación por igualación

Este método consiste en despejar la misma variable en las dos ecuaciones e igualar los resultados obteniendo una ecuación con una sola variable que se despeja para obtener su valor.

Ejemplo

Se resuelve el mismo sistema ahora por igualación

$$2x-y=6 \qquad (1)$$
$$x+2y=8 \qquad (2)$$

Despejando x en cada una de las ecuaciones

$$2x-y=6 \qquad (1)$$
$$x=\frac{6+y}{2}$$

$$\boxed{x = 3 + \frac{1}{2}y}$$

$$x + 2y = 8 \qquad (2)$$

$$\boxed{x = 8 - 2y}$$

Se igualan los valores

$$3 + \frac{1}{2}y = 8 - 2y$$

$$\frac{1}{2}y + 2y = 8 - 3$$

$$\frac{5}{2}y = 5$$

$$y = 5\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$y = 2$$

Sustituyendo $y = 2$ en cualquiera de las dos ecuaciones

$$2x - y = 6$$
$$2x - 2 = 6$$
$$2x = 6 + 2$$
$$x = \frac{8}{2}$$
$$\boxed{x = 4}$$

Que es la misma solución que se encontró con los métodos anteriores.

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas lineales:

1) $3x + 2y = -5$
$2x - 5y = -8$

2) $3x - 4y = 2$
$-6x + 8y = -4$

3) $2x + y = 2$
$4x + 3y = -2$

4) $3x - 5y = 9$ / $2x + 3y = -7/2$ 5) $3x + 5y = -2$ / $9x + 15y = 8$ 6) $4x + y = 3$ / $6x - 2y = -2$

$$\begin{array}{llllll} 4) & 3x - 5y = 9 & 5) & 3x + 5y = -2 & 6) & 4x + y = 3 \\ & 2x + 3y = -7/2 & & 9x + 15y = 8 & & 6x - 2y = -2 \end{array}$$

Sistemas de *n* ecuaciones con *n* variables

En esta sección se presenta, para resolver un sistema de n ecuaciones con n variables, una extensión de algunos de los métodos mencionados en la sección anterior pero también los métodos de Gauss y Gauss-Jordan que tienen como ventaja la sistematización de sus pasos.

Método de eliminación por suma y resta y sustitución

Si un sistema de n ecuaciones con n variables tiene una solución, ésta se puede encontrar mediante una combinación de los métodos de suma y resta y sustitución para llegar a un sistema equivalente en el que cada una de las n ecuaciones contenga una sola variable y cada ecuación maneje una literal distinta de las variables que intervienen en las demás.

Ejemplos

1. Para encontrar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 6 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

se procede de la siguiente manera:

Como el coeficiente de y en cada una de las ecuaciones es 1 resulta fácil eliminarlo por suma y resta. Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene, junto con las dos restantes del sistema original, un sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 2x + 2z &= 6 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Se puede obtener otra ecuación sin y sumando las ecuaciones ecuaciones, obteniendo el sistema:

$$2x + 2z = 6$$
$$2x + z = 5$$
$$x + y - z = 0$$

Las primeras dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se pueden resolver para x y z. Restando la segunda de la primera se obtiene $z = 1$. Sustituyendo este valor en la segunda y despejando x se obtiene $2x + 1 = 5$, de donde $x = (5 - 1)/2 = 2$, y el nuevo sistema equivalente:

$$z = 1$$
$$x = 2$$
$$x + y - z = 0$$

Se sustituyen en la tercera ecuación los valores de x y z y se despeja y, $2 + y - 1 = 0$, de donde, $y = -1$, se obtiene finalmente el sistema equivalente deseado:

$$z = 1$$
$$x = 2$$
$$y = -1$$

2. Para hallar el conjunto solución de

$$x - y + z + w = 3$$
$$2x + y + z - w = 4$$
$$x + y - z + 2w = 2$$
$$x + 2y + 3z - 2w = 7$$

Eliminando x de la primera y la segunda, de la primera y tercera y de la tercera y cuarta y manteniendo la primera, que es la que presenta los coeficientes más pequeños, se llega al sistema equivalente:

$$-3y + z + 3w = 2$$
$$-2y + 2z - w = 1$$
$$-y - 4z + 4w = -5$$
$$x - y + z + w = 3$$

Eliminando z a partir de la primera y segunda ecuaciones, a partir de la primera y la tercera, agregando las ecuaciones segunda y cuarta, se llega al sistema equivalente:

$$-4y + 7w = 3$$
$$-13y + 16w = 3$$

$$
\begin{aligned}
-2y + 2z - w &= 1 \\
x - y + z + w &= 3
\end{aligned}
$$

Usando las ecuaciones primera y segunda para eliminar y, manteniendo la primera, la tercera y la cuarta, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
w &= 1 \\
-4y + 7w &= 3 \\
-2y + 2z - w &= 1 \\
x - y + z + w &= 3
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la segunda ecuación el valor de w y despejando y, se encuentra $y = 1$, sustituyendo ambos valores en la tercera se encuentra $z = 2$, sustituyendo los valores encontrados en la cuarta y despejando se llega al sistema equivalente buscado:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
y &= 1 \\
z &= 2 \\
w &= 1
\end{aligned}
$$

Métodos de Gauss y Gauss-Jordan

Primero se presenta la forma de expresar un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas utilizando el lenguaje matricial.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales ($m = n = 2$)

$$
\left.\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 &= 14 \\
2x_1 - 3x_2 &= 3
\end{aligned}\right\}
$$

Se definen para él las siguientes matrices:

A es la matriz de los coeficientes del sistema, las columnas corresponden a los coeficientes de las variables x_1, la primera, y x_2 la segunda, los renglones corresponden a las ecuaciones:

$$
[A] = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}
$$

X es la matriz de las incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

que también se conoce como *vector columna* porque consta de una columna y de tantos renglones como variables intervienen en el sistema.

B es la matriz de los términos independientes.

$$B = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para esta matriz o vector columna, es conveniente mencionar que cuando *todos* sus elementos son iguales a cero $(b_{mi} = 0)$, se dice que el sistema es *homogéneo* y cuando sus elementos no todos son iguales a cero, se tratará con un sistema *no homogéneo*.

C es la matriz *ampliada o aumentada* que consta de los coeficientes de las incógnitas y de los términos independientes.

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 14 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

También se le denota como $[A:B]$

En general un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, se puede escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & .a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Donde a cada elemento de A se denota como aij donde i se refiere al i–ésimo renglón y j corresponde a la j–ésima columna. Cuando $i=j$ los términos a_{11}, a_{22}, a_{33} ... constituyen lo que se conoce como la *diagonal principal* de la matriz A.

Entonces el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo presentado queda en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

Haciendo uso de las operaciones con matrices* se tiene

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

finalmente queda el sistema original

$$5\,x_1 + 2x_2 = 14$$
$$2x_1 - 3x_2 = 3$$

Conociendo la manera de expresar un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial, se presentan a continuación algunos métodos para obtener su solución.

Método de Gauss o de triangularización

Este método consiste en tomar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales y, por medio de operaciones elementales que se pueden aplicar a una matriz, llegar a una matriz triangular superior; una matriz de este tipo es aquella

* La multiplicación de matrices se efectúa utilizando la multiplicación escalar entre vectores, esto es, la suma de los productos término a término correspondientes de cada renglón de la primera matriz por cada columna de la segunda, que deben tener el mismo número de componentes para que se pueda efectuar.

que en la diagonal consta de 1 únicamente, y debajo de la diagonal cada elemento es igual a cero.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

tomando la matriz aumentada

$$[A{:}B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Como puede observarse, el primer término de la diagonal $a_{11}=1$ permanece igual; en caso de que fuera $a_{11} \neq 1$ se tendría que dividir entre a_{11} para que quedara la unidad.

Después del término $a_{11}=1$ (llamado también pivote), el paso siguiente es hacer ceros debajo de este término por medio de ciertas operaciones elementales válidas para una matriz.

Operaciones elementales:

En toda matriz se permite:

- Multiplicar uno de los renglones por una constante diferente de cero.
- Intercambiar dos de los renglones.
- Sumar un múltiplo de uno de los renglones a otro renglón.

Entonces, en la matriz aumentada del ejemplo anterior, se hace lo siguiente:
Se multiplica por –4 el primer renglón y se le suma al segundo renglón.
Se multiplica por –1 el primer renglón y se le suma al tercer renglón.

La matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -12 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora se quiere que el término a_{22}=1, entonces se tiene que multiplicar el segundo renglón por (-½) para que nos dé la unidad.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Se multiplica por 2 el segundo renglón y se suma al tercer renglón para obtener

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

Se multiplica por (1/11) el tercer renglón para obtener en el término a_{33}=1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} \end{array}\right)$$

Así se obtiene una matriz triangular superior, donde los elementos de la diagonal son 1 y los elementos por debajo de la diagonal son cero. Reescribimos el sistema de ecuaciones lineales correspondiente de la siguiente forma

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \qquad (1)$$
$$x_2 + 6x_3 = ½ \qquad (2)$$
$$x_3 = 1/11 \qquad (3)$$

Para encontrar la solución, se parte de la última ecuación y en forma regresiva se despejan las incógnitas faltantes.

$$\boxed{x_3 = 1/11}$$

Despejando x_2 de la ecuación (2) y sustituyendo el valor de x_3

$$x_2 = ½ - 6x_3 = ½ - 6\,(1/11) = ½ - 6/11 = -1/22$$

$$\boxed{x_2 = -1/22}$$

Ahora, sustituyendo el valor de x_3 y x_2 en la ecuación (1) y despejando x_1

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3$$
$$= 1-2(-1/22)-3(1/11)=1+2/22-3/11 = 11/11+1/11-3/11$$
$$\boxed{x_1 = 9/11}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es (9/11,–1/22, 1/11)

Comprobación de la solución en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 1 \\ 9/11+2(-1/22)+3(1/11) &= 1 \\ 9/11-1/11+3/11 &= 1 \\ 11/11 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Este método se extiende para un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Método de Gauss-Jordan o de diagonalización

Este método también se aplica a la matriz aumentada hasta transformar la matriz A_{nxn} a una matriz identidad I_n.

Una matriz identidad I_n es aquella que en la diagonal principal consta de 1, y arriba y debajo de ella, todos los elementos son iguales a cero; el procedimiento para transformar la matriz $A_{x \times n}$ en una matriz I_n es el mismo que en el método anterior.

Si se parte del mismo sistema de ecuaciones lineales anterior, se transforma la matriz aumentada $[A{:}B]$, en una matriz triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} \end{array}\right)$$

Ahora bien, el método de Jordan señala que los elementos a_{ij} con $i \neq j$ deben ser todos cero, sólo falta convertir en ceros los elementos que están por arriba de la diagonal para tener completo este método, entonces se procede de la siguiente manera:

Se multiplica por –6 el tercer renglón y se suma al segundo renglón.

Se multiplica por –3 el tercer renglón y se suma al primer renglón

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{8}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} \end{array}\right)$$

Finalmente se multiplica por –2 el segundo renglón y se suma al primer renglón

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9/11 \\ 0 & 1 & 0 & -1/22 \\ 0 & 0 & 1 & 1/11 \end{array}\right)$$

Como se observa, la matriz A está transformada en una matriz identidad I_3 de 3 renglones y tres incógnitas, además está agregada la última columna que pertenece a los términos independientes.

De forma inmediata se obtiene el valor de cada incógnita.

$$x_1 = 9/11$$
$$x_2 = -1/22$$
$$x_3 = 1/11$$

Que son los mismos valores que se obtuvieron con el método de Gauss.

Además, en la teoría de matrices existe un teorema que nos dice que si rango $[A]$ es igual al rango de la matriz aumentada $[A{:}B]$ entonces el sistema tiene solución.

El rango de una matriz es el número de renglones distintos de cero.

En el caso del sistema que se está manejando se observa que:

$$r[A] = 3 \text{ (el rango de la matriz)}$$
$$r[A{:}B] = 3 \text{ (el rango de la matriz aumentada)}$$

Cuando estos rangos son iguales, el sistema tiene al menos una solución, es *consistente.* Si este rango es igual al número de variables, entonces la solución es única y

* Se llama rango de la matriz al número de filas distintas de cero, esto es, que tengan al menos un elemento diferente de cero, las cuales aparecen en la matriz transformada en forma triangular.

el sistema se llama *determinado*. Cuando los rangos de la matriz y la matriz aumentada son distintos, entonces el sistema no tiene solución, es *inconsistente*.

En este sistema $r = 3$ y $n = 3$ incógnitas.

Por lo tanto, el sistema es *determinado*, tiene una única solución.

Hasta ahora sólo se han trabajado sistemas lineales de m ecuaciones con n incógnitas con $m= n$, pero qué pasa con los sistemas de ecuaciones lineales cuando $m \neq n$, a continuación se verán algunos casos.

Ejemplos

- Caso en el que $m>n$.

Encontrar la solución del siguiente sistema con $m = 3$ ecuaciones y $n = 2$ incógnitas, por el método de Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Se toma la matriz aumentada

$$[A:B] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Como el término $a_{11}=1$ se queda como está, el paso siguiente es hacer ceros en los términos debajo de a_{11}.

Se multiplica por -3 el primer renglón y se suma al segundo.

Se multiplica por -2 el primer renglón y se suma al tercero

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Ahora, el término $a_{22}=10$, entonces se multiplica el segundo renglón por (1/10) para obtener $a_{22}=1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Se multiplica por 2 el segundo renglón y se suma al primero.
Se multiplica por –3 el segundo renglón y se suma al tercero.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} -2/10 \\ -1/10 \\ 33/10 \end{matrix}}_{B} \right.$$

Se tiene que rango $[A] = 2$

rango $[A{:}B] = 3$

Como son diferentes los rangos, por el teorema antes mencionado, el sistema es *inconsistente* (no tiene solución). Además, el tercer renglón de la matriz en forma de ecuación queda como:

$$0x_1 + 0x_2 = 33/10$$

Y no existe x_1 y x_2 que satisfagan tal ecuación, por lo tanto es *inconsistente*.

- Caso en el que $m>n$

Encontrar la solución por el método de triangularización de Gauss del siguiente sistema con $m = 3$ y $n = 2$.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}$$

$$[A{:}B] = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & 12 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

El término $a_{11} = 4$ entonces se multiplica el primer renglón por (1/4) para obtener $a_{11}=1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

Se multiplica por –3 el primer renglón y se suma al segundo.

Se multiplica por 2 el primer renglón y se suma al tercero

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

rango $[A]=1$

rango $[A{:}B]=1$

Como los rangos de las matrices son iguales entonces el sistema es *consistente* (tiene solución). En la matriz resultante el segundo y tercer renglón son ceros, esto quiere decir que son ecuaciones redundantes y el sistema puede representarse con sólo la primera ecuación.

El sistema resultante de la matriz es:

$$x_1 - 2x_2 = 3 \qquad \text{despejando } x_1$$
$$x_1 = 3 + 2x_2$$

Existen infinidad de soluciones tantas como valores se dan a x_2

$$x_1 = 3+2t$$
$$x_2 = t$$

Otra forma de saber que tiene infinidad de soluciones, es porque el rango de la matriz es 1 y se tienen 2 incógnitas. Se dice que hay 2 – 1 grados de libertad

- *Caso en el que $m<n$*

Encontrar la solución para el siguiente sistema de ecuaciones lineales con $m = 2$ y $n = 3$.

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 48$$
$$2x_1 + 13x_2 + 2x_3 = 48$$

tomando la matriz aumentada

$$[A{:}B] \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 48 \\ 2 & 13 & 2 & 48 \end{array}\right)$$

se multiplica el primer renglón por ¼ para obtener a_{11}=1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 12 \\ 2 & 13 & 2 & 48 \end{array}\right)$$

Se multiplica por –2 el primer renglón y se suma al segundo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 12 \\ 0 & 12 & \frac{6}{4} & 24 \end{array}\right)$$

Se multiplica por 1/12 el segundo renglón para obtener a_{22}=1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 12 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & 2 \end{array}\right)$$

El sistema de ecuaciones queda como:

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 = 12$$
$$x_2 + 1/8\, x_3 = 2$$

despejando x_2 de la segunda ecuación

$$\boxed{x_2 = 2 - 1/8\ x_3}$$

despejando x_1 de la primera ecuación y sustituyendo el valor de x_2

$$x_1 = 12 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3$$
$$x_1 = 12 - \tfrac{1}{2}(2 - 1/8\, x_3) - \tfrac{1}{4}x_3$$
$$= 12 - 1 + 1/16\, x_3 - \tfrac{1}{4}x_3$$
$$\boxed{x_1 = 11 - 3/16\, x_3}$$
$$\boxed{x_3 = t}$$

Como x_1 y x_2 están en función de la variable x_3, de acuerdo con los valores que se le den a x_3 se tendrán diferentes soluciones particulares, por lo tanto el sistema tiene infinidad de soluciones.

El conjunto solución es :

$(11 - 3/16\, t, 2 - 1/8\, t, t)$. Haciendo referencia a los teoremas sobre matrices se tiene que:
rango $[A] = 2$ y rango $[A{:}B]=2$ por lo tanto el sistema es *consistente*.

Rango = 2 y el número de incógnitas = 3 entonces el sistema es *indeterminado* (tiene infinidad de soluciones).

Ejercicios

Encontrar la solución de los siguientes sistemas por el método de Jordan.

1)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolver los sistemas por el método de Gauss

1)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 11x_1 + 7x_2 &= -30 \end{aligned}$$

Capítulo 8

Ecuaciones de segundo grado

Conceptos

Toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en la que $a \neq 0$, es una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática.

La ecuación de segundo grado, en la que $b = 0$, es una ecuación cuadrática pura. Las ecuaciones:

$$ax^2+c =0$$
$$8x^2-32 =0$$
$$3x^2-27 =0$$
$$5x^2+125 =0,$$ son *cuadráticas puras.*

La ecuación cuadrática pura carece del término de primer grado.
La ecuación de segundo grado en la que $c = 0$ es una ecuación cuadrática mixta incompleta. Las ecuaciones:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$5x^2 - 15x = 0$$
$$25x^2 + 75x = 0,$$ son *cuadráticas mixtas incompletas.*

La ecuación cuadrática mixta incompleta carece de término independiente.
La ecuación de segundo grado en que $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, es una ecuación cuadrática mixta completa. Las ecuaciones:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$
$$2x^2 - 4x + 7 = 0$$
$$5x^2 - 3x + 2 = 0,$$ son *ecuaciones cuadráticas mixtas completas.*

Las ecuaciones cuadráticas mixtas completas tienen término de segundo grado, término de primer grado y término independiente.

Solución de la ecuación cuadrática pura

Para resolver una ecuación cuadrática pura:

- Se despeja el término de segundo grado.

• Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de la incógnita.

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación.

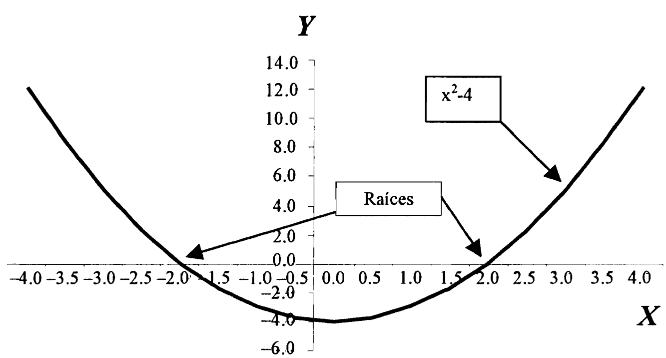
Ejemplos:

1. $x^2 - 4 = 0$

Se despeja el término de 2° grado $x^2 = 4$
Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación $x = \pm 2$
Las raíces de la ecuación son: 2 y –2
Las raíces se dan en la forma siguiente $x_1 = 2$, $x_2 = -2$
Comprobación:
Para $x_1 = 2$, al sustituir resulta $2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
Para $x_2 = -2$, al sustituir resulta $(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
Ambas respuestas satisfacen la ecuación. Son sus raíces.

x	y $x^2–4$
–4.0	12.0
–3.5	8.3
–3.0	5.0
–2.5	2.3
–2.0	0.0
–1.5	–1.8
–1.0	–3.0
–0.5	–3.8
0.0	–4.0
0.5	–3.8
1.0	–3.0
1.5	–1.8
2.0	0.0
2.5	2.3
3.0	5.0
3.5	8.3
4.0	12.0

Figura 9



2. $3x^2 - 48 = 0$

Se despeja el término de 2° grado $3x^2 = 48$
Se dividen ambos miembros entre el coeficiente de la incógnita $x^2 = 16$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación $x = \pm 4$

$$x_1 = 4,\; x_2 = -4$$

Comprobación:
Al sustituir en la ecuación x por 4 resulta

$$3(4)^2 - 48 = 3\,(16) - 48 = 0$$

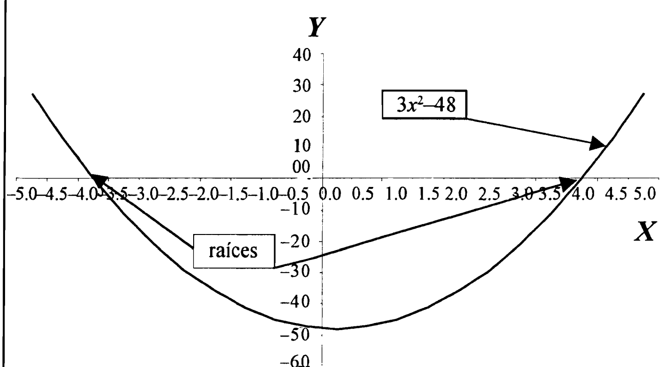
Al sustituir en la ecuación x por -4 se obtiene

$$3(-4)^2 - 48 = 3\,(16) - 48 = 0$$

Ambas respuestas satisfacen la ecuación. Son raíces.

x	Y $3x^2-48$
–5.0	27.0
–4.5	12.8
–4.0	0.0
–3.5	–11.3
–3.0	–21.0
–2.5	–29.3
–2.0	–36.0
–1.5	–41.3
–1.0	–45.0
–0.5	–47.3
0.0	–48.0
0.5	–47.3
1.0	–45.0
1.5	–41.3
2.0	–36.0
2.5	–29.3
3.0	–21.0
3.5	–11.3
4.0	0.0
4.5	12.8
5.0	27.0

Figura 10



3. $7x^2 - 56 = 0$

Se despeja el término de segundo grado $7x^2 = 56$
Se dividen ambos miembros entre el coeficiente de la incógnita $x^2 = 8$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$
$$x_1 = 2\sqrt{2}$$
$$x_2 = -2\sqrt{2}$$

Comprobación:
Al sustituir x por $2\sqrt{2}$ se tiene:

$$7(2\sqrt{2})^2 - 56 = 0$$
$$7\ (8) - 56 = 0$$

Al sustituir x por $-2\sqrt{2}$

$$7(-2\sqrt{2})^2 - 56 = 7\ (8) - 56 = 0$$

Ambas respuestas son raíces porque satisfacen la ecuación.

4. $4x^2 - 27 = x^2$

Se despeja el término de segundo grado $4x^2 - x^2 = 27;\ 3x^2 = 27$
Se divide entre el coeficiente de la incógnita $x^2 = 9$
Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros $x = \pm 3$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3$$

Comprobación:
Para $x_1 = 3$, se tiene $4(3)^2 - 27 = 4\ (9) - 27 = 9$:
Para $x_2 = -3$, se tiene $4(-3)^2 - 27 = 4\ (9) - 27 = 9$; $(-3)^2 = 9$
Ambas respuestas son raíces.

5. $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{4}{x-2}$

Se quitan los denominadores y se tiene $x^2 - 4 = 12$
Se despeja el término de segundo grado $x^2 = 16$
Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros $x = \pm 4$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -4$$

Comprobación:
Para $x_1 = 4$, el primer miembro es $\dfrac{4+2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$,

el segundo es $\dfrac{4}{4-2} = \dfrac{4}{2} = 2$, la ecuación queda satisfecha.

Para $x_2 = -4$, el primer miembro es $\dfrac{-4+2}{3} = \dfrac{2}{3}$, el segundo es

$\dfrac{4}{-4-2} = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$ la ecuación queda satisfecha.

Ambas respuestas son raíces de la ecuación porque lo satisfacen.

6. $(x + 6)(x - 6) = 28$

Se efectúa el producto en el primer miembro $x^2 - 36 = 28$
Se despeja el término de segundo grado $x^2 = 64$
Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros $x = \pm 8$

$$x_1 = 8, \quad x_2 = -8$$

Comprobación:
Para $x_1 = 8$, $(8 + 6)(8 - 6) = 14(2) = 28$, la ecuación se satisface.
Para $x_2 = -8$ $(-8 + 6)(-8 - 6) = (-2)(-14) = 28$, la ecuación se satisface.
Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

Solución de la ecuación cuadrática pura por descomposición en factores

Para resolver una ecuación cuadrática pura por descomposición en factores se utiliza el siguiente procedimiento:

- Se pasan todos los términos al primer miembro y se reduce.
- Se divide entre el coeficiente de la incógnita.
- Se descompone el primer miembro en factores.
- Se iguala a cero cada uno de los factores y se resuelven las dos ecuaciones así obtenidas.

Ejemplos:

1. $3x^2 = 36 - x^2$ (por descomposición en factores)

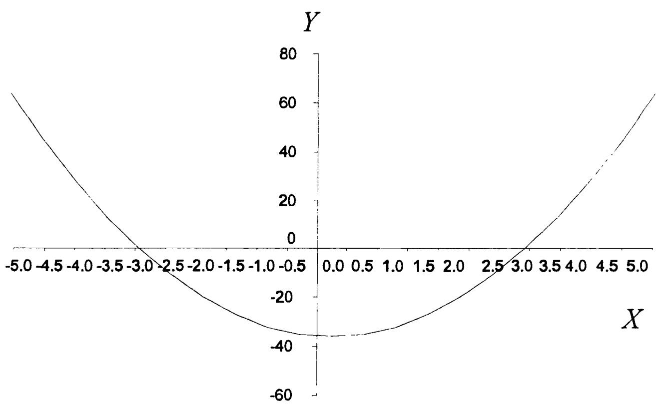
Se pasan todos los términos al primer miembro

$$3x^2 + x^2 - 36 = 0$$
$$4x^2 - 36 = 0$$

Se divide entre el coeficiente de la incógnita $x^2 - 9 = 0$
Se descompone el primer miembro en factores $(x+3)\,(x-3) = 0$
Se iguala a cero cada uno de los factores $x + 3 = 0$, $x - 3 = 0$
Al resolver $x + 3 = 0$, $x_1 = -3$
Al resolver $x - 3 = 0$, $x_2 = 3$
Comprobación:
Para $x_1 = -3$
$3(-3)^2 = 3\ (9) = 27$
$36 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27$, la ecuación se satisface.
Para $x_2 = 3$
$3\ (3^2) = 3 \text{ x } 9 = 27$
$36 - 3^2 = 36 - 9 = 27$, la ecuación se satisface.
Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

	Y
x	$4x^2-36$
–5.0	64.0
–4.5	45.0
–4.0	28.0
–3.5	13.0
–3.0	0.0
–2.5	–11.0
–2.0	–20.0
–1.5	–27.0
–1.0	–32.0
–0.5	–35.0
0.0	–36.0
0.5	–35.0
1.0	–32.0
1.5	–27.0
2.0	–20.0
2.5	–11.0
3.0	0.0
3.5	13.0
4.0	28.0
4.5	45.0
5.0	64.0

Figura 11



2. $2x^2 = 76 - 2\,x^2$

Al pasar todos los términos al primer miembro y reducir se obtiene

$$4x^2 - 76 = 0$$

Se divide entre el coeficiente de la incógnita $x^2 - 19 = 0$
Se descompone el primer miembro en factores.

$$(x + \sqrt{19})\,(x - \sqrt{19}) = 0$$

Se iguala a cero cada uno de los factores, $x + \sqrt{19} = 0$, $x - \sqrt{19} = 0$

Al resolver $x + \sqrt{19} = 0$, $x_1 = -\sqrt{19}$

Al resolver $x - \sqrt{19} = 0$, $x_2 = \sqrt{19}$

Comprobación:

Para $x_1 = -\sqrt{19}$, $2(\sqrt{19})^2 = 2\,(19) = 38;$

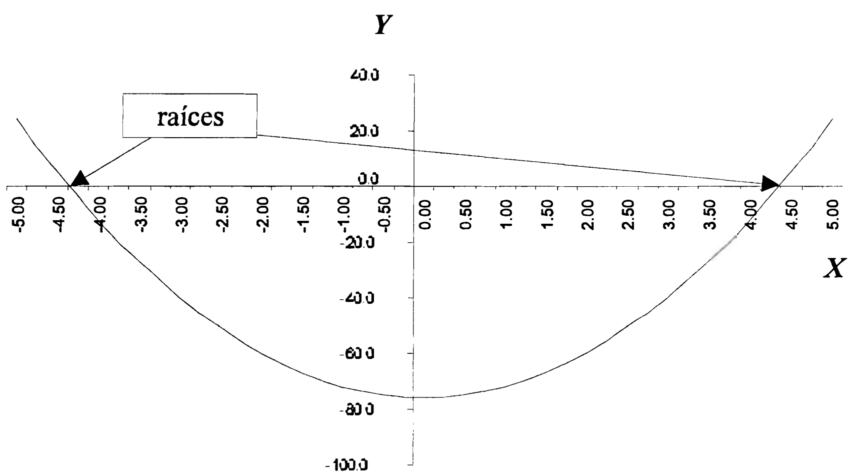
$76 - 2(-\sqrt{19})^2 = 76 - 38 = 38$

Para $x_2 = \sqrt{19}$, $2(-\sqrt{19})^2 = 2\,(19) = 38;$

$76 - 2(-\sqrt{19})^2 = 76 - 38 = 38$

Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

Figura 12



	Y
x	$4x^2–76$
–5.00	24.0
–4.75	14.3
–4.50	5.0
–4.25	–3.8
–4.00	–12.0
–3.75	–19.8
–3.50	–27.0
–3.25	–33.8
–3.00	–40.0
–2.75	–45.8
–2.50	–51.0
–2.25	–55.8
–2.00	–60.0
–1.75	–63.8
–1.50	–67.0
–1.25	–69.8
–1.00	–72.0
–0.75	–73.8
–0.50	–75.0
–0.25	–75.8
0.00	–76.0

	Y
x	$4x^2–76$
0.50	–75.0
0.75	–73.8
1.00	–72.0
1.25	–69.8
1.50	–67.0
1.75	–63.8
2.00	–60.0
2.25	–55.8
2.50	–51.0
2.75	–45.8
3.00	–40.0
3.25	–33.8
3.50	–27.0
3.75	–19.8
4.00	–12.0
4.25	–3.8
4.50	5.0
4.75	14.3
5.00	24.0
3.50	–27.0
3.75	–19.8

Solución de la ecuación cuadrática mixta incompleta

Para resolver la ecuación cuadrática mixta incompleta utilizaremos el siguiente procedimiento:

- Se le da la forma $ax^2 + bx = 0$
- Se descompone $ax^2 + bx$ en factores.
- Se iguala a cero cada uno de los factores.
- Se resuelven las dos ecuaciones que resultan.
- La ecuación cuadrática mixta incompleta siempre tiene una raíz igual a cero.

Ejemplos:

1. $x^2 - 5x = 0$

   Se descompone $x^2 - 5x$ en factores, $x^2 - 5x = x(x - 5)$
   Se iguala a cero cada uno de los factores $x = 0$, $x - 5 = 0$

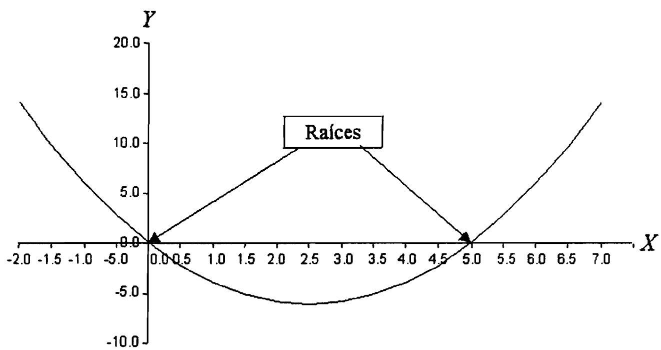
Se resuelven las dos ecuaciones $x = 0$ y $x - 5 = 0$, las raíces son

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

Comprobación:
Para $x_1 = 0$, $0^2 - 5\,(0) = 0$
Para $x_2 = 5$, $5^2 - 5\,(5) = 25 - 25 = 0$
Las dos respuestas son raíces de la ecuación.

x	Y x^2-5x
–2.0	14.0
–1.5	9.8
–1.0	6.0
–0.5	2.8
0.0	0.0
0.5	–2.3
1.0	–4.0
1.5	–5.3
2.0	–6.0
2.5	–6.3
3.0	–6.0
3.5	–5.3
4.0	–4.0
4.5	–2.3
5.0	0.0
5.5	2.8
6.0	6.0
6.5	9.8

Figura 13



2. $6x^2 + 5x = 0$

Se descomponen $6x^2 + 5x$ factores, $x(6x + 5)$
Se iguala a cero cada uno de los factores $x = 0$, $6x + 5 = 0$
Se resuelven las ecuaciones $x = 0$ y $6x + 5 = 0$, las raíces son $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{5}{6}$

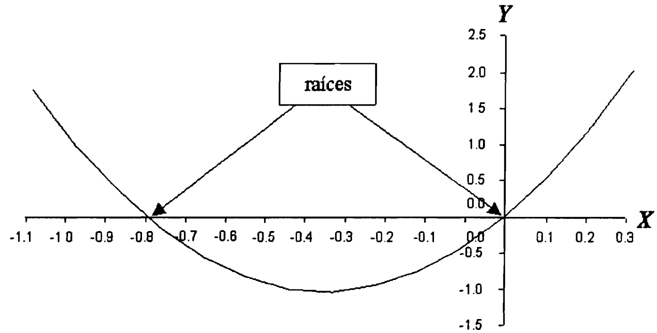
Comprobación:
Para $x_1 = 0$, $6\,(0) + 5\,(0) = 0$

Para $x_2 = -\dfrac{5}{6}$, $6\,(-\dfrac{5}{6})^2 + 5\,(-\dfrac{5}{6})\ \dfrac{6.*25}{36} = -\dfrac{25}{6} = \dfrac{25}{6} - \dfrac{25}{6} = 0$

Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

x	Y $6x^2+5x$
–1.100	1.8
–1.000	1.0
–0.900	0.4
–0.800	–0.2
–0.700	–0.6
–0.600	–0.8
–0.500	–1.0
–0.400	–1.0
–0.300	–1.0
–0.200	–0.8
–0.100	–0.4
0.000	0.0
0.100	0.6
0.200	1.2
0.300	2.0

Figura 14



3. $5x^2 - 2x = 3x^2 - 5x$

Se pasan todos los términos al primer miembro y se reducen

$$2x^2 + 3x = 0$$

Se descompone $2x^2 + 3x$ en factores, $2x^2 + 3x = x\,(2x + 3)$
Se iguala a cero cada uno de los factores, $x = 0$, $2x + 3 = 0$
Se resuelven las ecuaciones $x = 0$ y $2x + 3 = 0$, las raíces son

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

Comprobación:
Para $x_1 = 0$, $2\,(0^2) + 3\,(0) = 0$

Para $x_2 = -\frac{3}{2}$, $2(-\frac{3}{2})^2 + 3(-\frac{3}{2}) = \frac{2\,(9)}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$

Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

Resolución de ecuación cuadrática mixta completa por descomposición en factores

Método especial para trinomios de la forma $x^2 + (a+b)x + ab$

Para resolver la ecuación cuadrática mixta completa por descomposición en factores se utiliza el siguiente procedimiento:

Se le da forma general de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se descompone el trinomio $ax^2 + bx + c = 0$ en factores.

Se iguala a cero cada uno de los factores (para que un producto sea cero es necesario que por lo menos uno de los factores sea cero).

Se resuelve cada una de las ecuaciones obtenidas.

Ejemplos:

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$ (por descomposición en factores)

Como ya tiene la forma general se descompone $x^2 + 3x + 2$ en factores, $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

Se iguala a cero cada uno de los factores $x + 2 = 0$ y $x + 1 = 0$

Se resuelven las ecuaciones $x + 2 = 0$ y $x + 1 = 0$, las raíces son

$$x_1 = -2 \quad \text{y} \quad x_2 = -1$$

Comprobación:

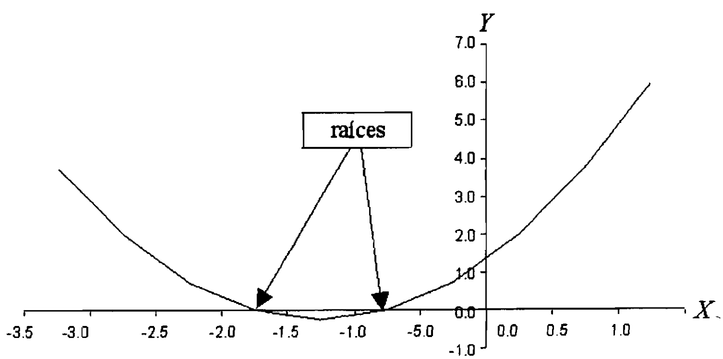
Para $x_1 = -2$, $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$

Para $x_2 = -1$, $(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

	Y
x	x^2+3x+2
–3.5	3.8
–3.0	2.0
–2.5	0.8
–2.0	0.0
–1.5	–0.3
–1.0	0.0
–0.5	0.8
0.0	2.0
0.5	3.8
1.0	6.0

Figura 15



2. $x^2 - 3x - 10 = 0$

Se descompone $x^2 - 3x - 10$ en factores $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$
Se iguala a cero cada uno de los factores $x - 5 = 0$ y $x + 2 = 0$
Se resuelven las ecuaciones $x - 5 = 0$ y $x + 2 = 0$, las raíces son $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$
Comprobación:
Para $x_1 = 5$, $(-5)^2 - 3(5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$
Para $x_2 = -2$, $(-2)^2 - 3(-2) + 10 = 4 + 6 - 10 = 0$
Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

3. $2x^2 + 7x + 6 = 0$

Se descompone $2x^2 + 7x + 6$ en factores.
Para descomponer $2x^2 + 7x + 6$ en factores, se multiplica el término independiente 6 por el coeficiente del término de segundo grado 2, $2 \times 6 = 12$ y se buscan dos números que multiplicados den 12 que sumados den el coeficiente del término de primer grado 7; los números son 3 y 4.
El término de primer grado se descompone en la suma de los dos números anteriores y se agrupa $2x^2 + 7x + 6 = 2x^2 + 4x + 3x + 6 = 2x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(2x+3)$.
Se iguala a cero cada uno de los factores $x + 2 = 0$ y $2x + 3 = 0$
Se resuelven las ecuaciones $x + 2 = 0$ y $2x + 3 = 0$, las raíces son $x_1 =$

$$-2 \text{ y } x_2 = -\frac{3}{2}$$

Comprobación:
Para $x_1 = -2$, $2(-2)^2 + 7(-2) + 6 = 8 - 14 + 6 = 0$.

Para $x_2 = -\frac{3}{2}$, $2(-\frac{3}{2})^2 + 7(-\frac{3}{2}) + 6 = 2\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{21}{2} + 6$

$$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

Las dos respuestas son raíces de la ecuación.

4. $2x^2 - 7x - 4 = 0$ por descomposición en factores.

Para descomponer $2x^2 - 7x - 4$ en factores, se buscan dos números que multiplicados den $2(-4) = -8$ y sumados den -7: los números son -8 y 1.

Se descompone el término de primer grado en $-8x + x$ y se agrupa $2x^2 - 8x + x - 4 = 2x\,(x - 4) + 1(x - 4) = (x - 4)\,(2x - 1)$

Se iguala a cero cada uno de los factores $x - 4 = 0$ y $2x - 1 = 0$

Se resuelven las ecuaciones $x - 4 = 0$ y $2x - 1 = 0$, las raíces son

$$x_1 = +4 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Comprobación:

Para $x_1 = +4$, $2\,(4)^2\ 7\,(4)\ 4 = 32\ 28\ \ 4 = 0$

Para $x_2 = \frac{1}{2}$, $2(\frac{1}{2})^2 + 7(\frac{1}{2}) - 4 = \frac{2}{4} + \frac{7}{2} - 4$

$$x_2 = \frac{8}{2} - 4 = 0$$

Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

Resolución de la ecuación cuadrática mixta completa por el procedimiento de completar el cuadrado perfecto

Para resolver la ecuación cuadrática mixta por este procedimiento se debe realizar el siguiente procedimiento:

Se despeja el término independiente

$$ax^2 + bx = -c$$

Se divide entre el coeficiente del término de segundo grado

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se suma a ambos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado.

$$x^2 + \frac{b}{a}\ x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Se descompone en factores el primer miembro de la ecuación y se reduce el segundo $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

A ambos miembros se extrae raíz cuadrada, $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Se despeja la incógnita, $x = \dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplos:

1. $x^2 + 6x - 16 = 0$ (completando el cuadrado)

Se despeja el término independiente $x^2 + 6x = 16$

Como el coeficiente de x^2 es uno, se suma a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, $x^2 + 6x + 9 = 16 + 9 = 25$

Se descompone en factores el primer miembro $(x + 3)^2 = 25$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros $x + 3 = \pm 5$

Se despeja la incógnita $x = -3 \pm 5$

$x_1 = -3 + 5, \quad x_1 = 2$

$x_2 = -3 - 5, \quad x_2 = -8.$

Comprobación:

Para $x_1 = 2$, $2^2 + 6\,(2) - 16 = 4 + 12 - 16 = 0$

Para $x_2 = -8$, $(-8)^2 + 6(-8) - 16 = 64 - 48 - 16 = 0$

Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

2. $x^2 - 7x + 12 = 0$ (completando el cuadrado)

Se despeja el término independiente $x^2 - 7x = -12$

Como el coeficiente de x^2 es 1 se suma a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, $x^2 - 7x + \dfrac{49}{4} = \dfrac{49}{4} - 12$

Se descompone en factores el primer miembro de la ecuación y se reduce el segundo $(x - \dfrac{7}{2})^2 - \dfrac{49}{4} - \dfrac{48}{4}$; $(x - \dfrac{7}{2})^2 - \dfrac{1}{4}$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros $x - \dfrac{7}{2} = \pm\dfrac{1}{2}$

Se despeja la incógnita, $x = \dfrac{7}{2} \pm \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}, \qquad x_1 = 4$

$x_2 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}, \qquad x_2 = 3$

Comprobación:
Para $x_1 = 4$, $4^2 - 7\,(4) + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$
Para $x_2 = 3$, $3^2 - 7\,(3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$
Las dos respuestas son raíces de la ecuación.

3. $3x^2 - 7x - 6 = 0$ (completando el cuadrado)

Se despeja el término independiente $3x^2 - 7x = 6$
Se dividen ambos miembros entre el coeficiente de x^2, $x^2 - \dfrac{7}{3}x = 2$
Se suma a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} = 2 + \frac{49}{36}$$

Se descompone en factores el primer miembro y se reduce el segundo

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{72}{36} + \frac{49}{36} = \frac{121}{36}$$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros $x - \dfrac{7}{6} = \pm\dfrac{11}{6}$

Se despeja la incógnita $x = \dfrac{7}{6} \pm \dfrac{11}{6}$

$x_1 = \dfrac{7}{6} + \dfrac{11}{6}$, $x_1 = 3$; $x_2 = \dfrac{7}{6} - \dfrac{11}{6} = -\dfrac{4}{6}$, $x_2 = -\dfrac{2}{3}$

Comprobación:
Para $x_1 = 3$, $3\,(3^2) - 7\,(3) - 6 = 27 - 21 - 6 = 0$

Para $x_2 = -\dfrac{2}{3}$, $3\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 7\left(-\dfrac{2}{3}\right) - 6 =$

$$= \frac{12}{9} + \frac{14}{3} - 6 = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} - 6 = 0$$

Las dos respuestas son raíces de la ecuación.

4. $2x^2 - 7x - 4 = 0$ (completando el cuadrado)

Se despeja el término independiente $2x^2 - 7x = 4$

Se dividen ambos miembros entre el coeficiente de x^2

$$x^2 - \frac{7}{2}x = 2$$

Se suman a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = 2 + \frac{49}{16}$$

Se descompone en factores el primer miembro y se reduce el segundo:

$$(x - \frac{7}{4})^2 = \frac{32 + 49}{16} = \frac{81}{16}$$

Se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros $x - \frac{7}{4} = \pm\frac{9}{4}$

Se despeja la incógnita $x = \frac{7}{4} \pm \frac{9}{4}$

$x_1 = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}$, $x_1 = 4$

$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{9}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

Comprobación:

Para $x_1 = 4$, $2(4^2) - 7(4) - 4 = 32 - 28 - 4 = 0$

Para $x_2 = -\frac{1}{2}$, $2(-\frac{1}{2})^2 - 7(-\frac{1}{2}) - 4 = \frac{2}{4} + \frac{7}{2} - 4 =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{2} - 4 = 0$$

Las dos respuestas son raíces de la ecuación.

Resolución de la ecuación cuadrática mixta completa por medio de la fórmula general

Para obtener la fórmula general se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ usando el método desarrollado en la sección anterior.

Se despeja el término independiente $ax^2 - bx = -c$

Se divide entre el coeficiente de x^2, $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Se suma a ambos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

Se descompone en factores el primer miembro de la ecuación y se reduce el segundo $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se despeja la incógnita $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Sumando el segundo miembro $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

La fórmula general es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, x es igual a una fracción cuyo numerador es el simétrico del coeficiente de x más y menos la raíz cuadrada del cuadrado del coeficiente de x, menos el cuádruplo del producto algebraico del coeficiente de x^2, por el término independiente y cuyo denominador es el duplo del coeficiente de x^2.

Ejemplos:

1. $x^2 + 4x + 3 = 0$ (aplicando la fórmula general)

En esta ecuación $a = 1$, $b = 4$ y $c = 3$

Se sustituyen estos valores en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y se obtiene

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4+2}{2} = -1 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$$

Comprobación:

Para $x_1 = -1$, $\quad (-1)^2 + 4(-1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

Para $x_2 = -3$, $\quad (-3)^2 + 4(-3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$

2. $x^2 - 14x + 13 = 0$ (aplicando fórmula general)

En la ecuación propuesta $a = 1$, $b = -14$ y $c = 13$

Se sustituyen estos valores en la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y se obtiene

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{14 \pm \sqrt{196-52}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2}$$

$$x_1 = \frac{14+12}{2} = 13 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{14-12}{2} = 1$$

Comprobación:

Para $x_1 = 13$, $\quad 13^2 - 14(13) + 13 = 169 - 182 + 13 = 0$

Para $x_2 = 1$, $\quad 1^2 - 14(1) + 13 = 1 - 14 + 13 = 0$

Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

3. $2x^2 - 4x - 1 = 0$ (aplicando la fórmula general)

En la ecuación propuesta $a = 2$, $b = -4$ y $c = -1$

Sustituyendo estos valores en la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se obtiene

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4}$$

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{6}}{4} = \frac{2+\sqrt{6}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{4-2\sqrt{6}}{4} = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$$

Comprobación:

Para $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$, $\quad 2\left(\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 4\left(\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right) - 1 =$

$$= \frac{10 - 4\sqrt{6}}{2} - 4 - 2\sqrt{6} - 1 = 5 - 2\sqrt{6} - 4 - 2\sqrt{6} - 1 = 0$$

Para $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{6}}{2}$, $2\left(\dfrac{2 - \sqrt{6}}{2}\right)^2 - 4\left(\dfrac{2 - \sqrt{6}}{2}\right) - 1 =$

$$= \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} - 4 + 2\sqrt{6} - 1 = 5 - 2\sqrt{6} - 4 + 2\sqrt{6} - 1 = 0$$

Ambas respuestas son raíces de la ecuación.

4. $9x^2 - 36x + 31 = 0$ (aplicando la fórmula general)

En la ecuación propuesta $a = 9$, $b = -36$ y $c = 31$

Sustituyendo estos valores en la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se obtiene

$$x = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4(9)(31)}}{2(9)} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1116}}{18} = \frac{36 \pm \sqrt{180}}{18} = \frac{36 \pm 6\sqrt{5}}{18}$$

$$x_1 = \frac{36 + 6\sqrt{5}}{18} = \frac{6 + \sqrt{5}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{36 - 6\sqrt{5}}{18} = \frac{6 - \sqrt{5}}{3}$$

Comprobación:

Para $x_1 = \dfrac{6+\sqrt{5}}{3} = 9\left(\dfrac{6+\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 36\left(\dfrac{6+\sqrt{5}}{3}\right) + 31 = 41 + 12\sqrt{5} - 72 - 12\sqrt{5} + 31 = 0$

Para $x_2 = \dfrac{6-\sqrt{5}}{3} = 9\left(\dfrac{6-\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 36\left(\dfrac{6-\sqrt{5}}{3}\right) + 31 = 41 - 12\sqrt{5} - 72 + 12\sqrt{5} + 31 = 0$

Las dos respuestas son raíces de la ecuación.

Cuando una ecuación de segundo grado con coeficientes racionales tiene raíces irracionales, las raíces son conjugadas, como en los dos últimos ejemplos, sólo difieren en un signo.

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas puras.

$$8x^2-32=0$$
$$3x^2-27=0$$
$$5x^2+125=0$$
$$3x^2=36-x^2$$
$$7x^2=56$$

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas mixtas incompletas.

$$5x^2-15x=0$$
$$25x^2+75x=0$$
$$3x^2=36x$$
$$x^2-5x=0$$
$$6x^2+5x=0$$

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas mixtas completas.

$$3x^2+5x-8=0$$
$$2x^2-4x+7=0$$
$$5x^2-3x+2=0$$
$$2x^2-7x-4=0$$
$$3x^2-7x-6=0$$

Capítulo 9

Ecuaciones simultáneas de primero y segundo grado

Para resolver un sistema simultáneo que esté formado por ecuaciones de primero y segundo grado, se procede de la siguiente forma:

1. Se identifican cada una de las ecuaciones del sistema.
2. Se igualan las ecuaciones.
3. Se despeja y se genera una sola ecuación cuadrática.
4. Se resuelve la ecuación cuadrática por cualquiera de los métodos desarrollados en el capítulo anterior (descomposición de factores, generación del cuadrado perfecto, fórmula general, etc.).
5. Se sustituye la raíz encontrada en la ecuación lineal y se despeja la otra incógnita.

Aunque los sistemas simultáneos de ecuaciones de primero y segundo grado pueden tener cero, una o dos soluciones, en ciencias sociales por lo general sólo se utiliza la que se ubica en primer cuadrante (x positiva, y positiva). Por esta razón para los siguientes ejercicios sólo se calcula la solución ubicada en este cuadrante I.

Ejemplos:

1. a. $y = 2 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{20}$

   b. $y = \frac{30 - x}{4}$

multiplicando ambos miembros por 20 e igualando

$20y = 40 + 4x + x^2 = 150 - 5x$ de donde

$x^2 + 9x - 110 = 0$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{521}}{2}$$

$$x = \frac{-9 \pm 2.825}{2}$$

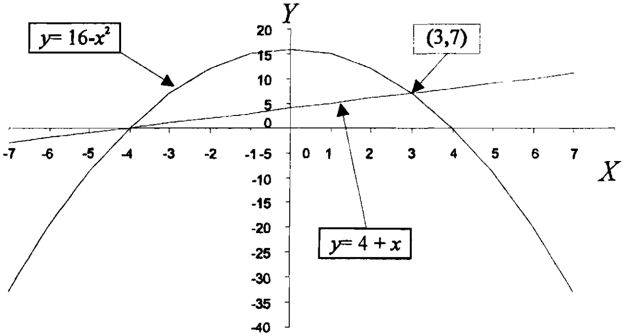
$x = 6.91$, sustituyendo este valor en la ecuación lineal y despejando y se obtiene $y = 5.77$

2. a. $y = 16 - x^2$

   b. $y = 4 + x$

$$y = 16 - x^2 = 4 + x$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x + 4)\,(x - 3) = 0$$
$$x = 3$$
$$y = 7$$

Figura 16

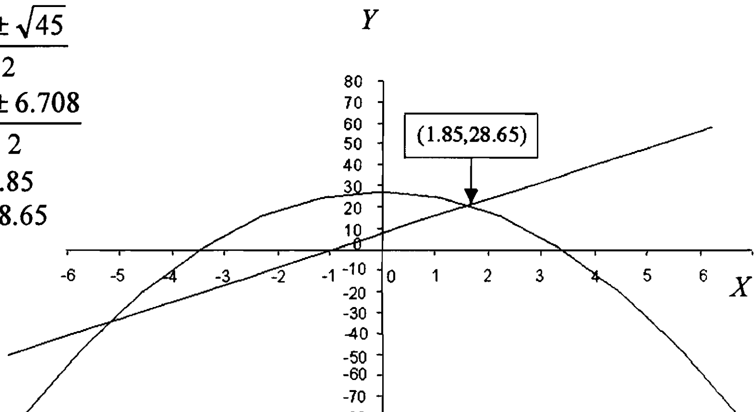


3. a. $y = 9x + 12$

   b. $y = 39 - 3x^2$

$$y = 9x + 12 = 39 - 3x^2$$
$$3x^2 + 9x - 27 = 0$$
$$x^2 + 3x - 9 = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{45}}{2}$$
$$x = \frac{-3 \pm 6.708}{2}$$
$$x = 1.85$$
$$y = 28.65$$

Figura 17



4. a. $(x + 6)(y + 12) = 144$

b. $y = 2 + \dfrac{x}{2}$

multiplicando por 2 $(x+6)$ ambos miembros

$$y = 2 + \frac{x}{2} = \frac{144}{x+6} - 12$$

$$4x + 24 + x^2 + 6x = 288 - 24x - 144$$

$$x^2 + 34x - 120 = 0$$

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{1156 + 480}}{2}$$

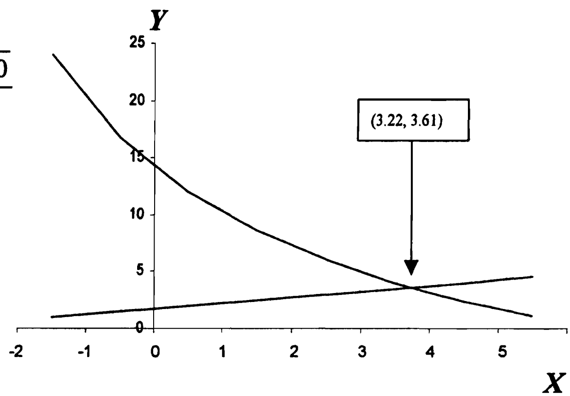
$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{1636}}{2}$$

$$x = \frac{-34 \pm 40.447}{2}$$

$x = 3.22$

$y = 3.61$

Figura 18



5. a. $(x + 4)\ y + 2) = 24$

b. $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ $\quad x$

$$y = \frac{24}{x+4} - 2 = 1 + \frac{x}{2}$$

$$48 - 4x - 16 = 2x + 8 + x^2 + 4x$$

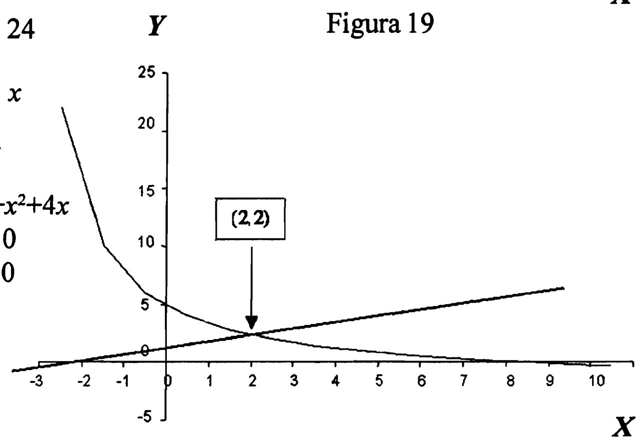
$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$(x + 12)\ (x - 2) = 0$$

$x = 2$

$y = 2$

Figura 19



Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios:

1.	a)	$y=\frac{x}{4}$	solución	$x=4$
	b)	$y(x+1)=5$		$y=1$
2.	a)	$y(x+3)=18$	solución	$x=3$
	b)	$y-3x+6=0$		$y=3$
3.	a)	$(x+12)(y+6)=169$	solución	$x=1$
	b)	$x-y+6=0$		$y=7$
4.	a)	$(x+5)(y+6)=80$	solución	$x=3$
	b)	$y=\frac{x}{3}+3$		$y=4$
5.	a)	$xy=15$	solución	$x=3$
	b)	$y=x+2$		$y=5$
6.	a)	$x(y+6)=24$	solución	$x=3$
	b)	$y-2x+4=0$		$y=2$
7.	a)	$(x+10)(y+5)=225$	solución	$x=5$
	b)	$x-y+5=0$		$y=10$

Si tienes dudas consulta los ejercicios resueltos.

Ecuaciones simultáneas de segundo grado

Un sistema simultáneo formado por ecuaciones de segundo grado se resuelve mediante el siguiente procedimiento:

1. Se identifican cada una de las ecuaciones del sistema.
2. Se igualan las ecuaciones.
3. Se despeja y se genera una sola ecuación cuadrática.
4. La ecuación cuadrática se resuelve por cualquiera de los métodos desarrollados anteriormente; descomposición de factores, generación del cuadrado perfecto, fórmula general, etcétera.
5. El valor encontrado se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales y se despeja la otra variable.

Ejemplos:

1. a. $y=6+\frac{x^2}{4}$

   b. $x=\sqrt{36-y}$

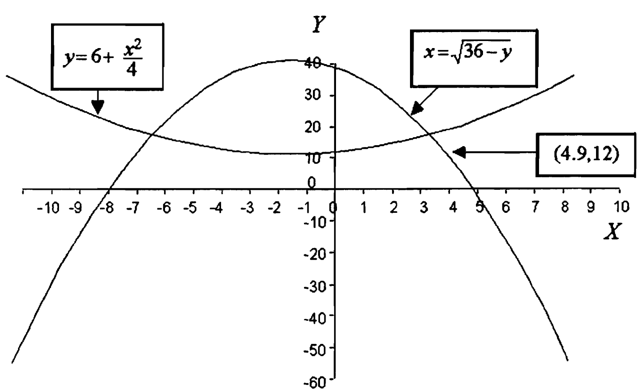
$$y=6+\frac{x^2}{4}=36-x^2$$

$24+x^2=144-4x^2, \rightarrow \qquad 5x^2=120$

$x^2=24, \quad \rightarrow \quad x=2\sqrt{6}$, despejando se obtiene que $x=4.90$, $y=12$

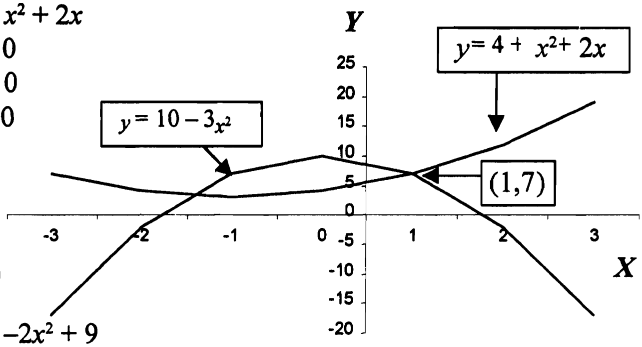
2. a. $y=10-3x^2$

Figura 20



b. $y = 4 + x^2 + 2x$

Figura 21



$$y = 10 - 3x^2 = 4 + x^2 + 2x$$
$$4x^2 + 2x - 6 = 0$$
$$2x^2 + x - 3 = 0$$
$$(2x + 3)\,(x - 1) = 0$$
$$x = 1,\;\; y = 7$$

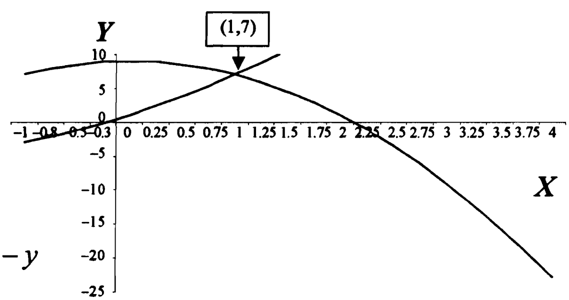
3. a. $y = x^2 + 5x + 1$

b. $y + 2x^2 - 9 = 0$

$$y = x^2 + 5x + 1 = -2x^2 + 9$$
$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$
$$(3x + 8)\,(x - 1) = 0$$
$$x = 1$$
$$y = 7$$

4. a. $x = 2y^2 - 2y - 6$
b. $x = -y^2 - y + 18$

Figura 22



$$x = 2y^2 - 2y - 6 = -y^2 - y + 18$$
$$3y^2 - y - 24 = 0$$
$$(3y + 8\,)\,(y - 3) = 0$$
$$y = 3$$
$$x = 6$$

5. a. $x = 3y^2 - 3y - 2$
b. $x = 10 - y^2 - y$

$$3y^2 - 3y - 2 = 10 - y^2 - y$$
$$4y^2 - 2y - 12 = 0$$
$$2y^2 - y - 6 = 0$$
$$(2y + 3)\,(y - 2) = 0$$
$$y = 2$$
$$x = 4$$

Ejercicios

1. a) $y = 48 - 3x^2$ solución $x \cong 2.37$
   b) $y = x^2 + 4x + 16$ $y \cong 31.15$

2. a) $x = 10y + 5y^2$ solución $x = 40$
   b) $x = 64 - 8y - 2y^2$ $y = 2$

3. a) $y = (x+2)^2$ solución $x = \dfrac{5}{2}$
   b) $y = 39 - 3x^2$ $y = \dfrac{81}{4}$

4. a) $x = 10y + 4y^2$ solución $y \cong 2.77$
   b) $x = 96 - 8y - 2y^2$ $x \cong 58.39$

5. a) $x = 84 - y^2$ solución $y = 4$
   b) $x = y + 4y^2$ $x = 68$

Capítulo 10

Ecuaciones y desigualdades

Desigualdades lineales simultáneas con dos variables

Un conjunto de dos o más desigualdades de las formas $ax+by+c>0$ o $ax+by+c<0$ ($a,b,c \in R$ y $a \neq 0$ o $b \neq 0$) se llama sistema de desigualdades lineales con dos variables. Su solución se encuentra con facilidad por graficación. La gráfica del sistema debe ser la intersección de los semiplanos correspondientes a cada una de las desigualdades.

Por ejemplo, considérese el sistema A:

$$A \begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ 2x - y + 4 < 0 \\ x < -5 \end{cases}$$

Primero se usarán los postulados y teoremas de orden para obtener desigualdades equivalentes a éstas, pero que sólo tengan y a la izquierda (si la desigualdad no contiene y se convierte en una que tenga x en un solo miembro). Así se obtiene el sistema equivalente

$$B \begin{cases} y < 1-x \\ y > 2x + 4 \\ x < -5 \end{cases}$$

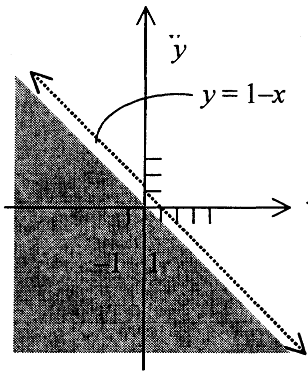
Las gráficas de las tres desigualdades aparecen en las figuras 23, 24 y 25.

Para encontrar la solución del sistema se trazan las gráficas de las tres rectas, marcando la región solución de cada una sobre el mismo sistema coordenado (figura 26). Cada recta divide al plano en dos regiones, una en la que los puntos, al ser sustituidos en la ecuación, dan un valor mayor o igual, y otros que lo dan menor o igual. Se puede valuar la ecuación en puntos de arriba y abajo para asegurar cuáles son los que interesan. La intersección de las regiones sombreadas constituye el espacio-solución buscado. En la gráfica está representada por la región sombreada y cubierta. En otras palabras, la gráfica del sistema consiste en la totalidad de puntos del plano localizados dentro del triángulo cuyos vértices son P,Q y R.

Puesto que el conjunto solución tiene un número infinito de elementos, nuestro único modo de representarlo algebraicamente es mediante la notación de conjuntos. El conjunto solución es

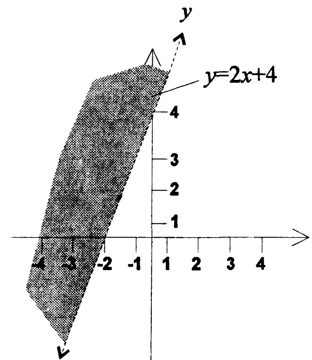
$$\{(x,y)|y<1-x, y>2x+4, x>-5\}$$

Figura 23



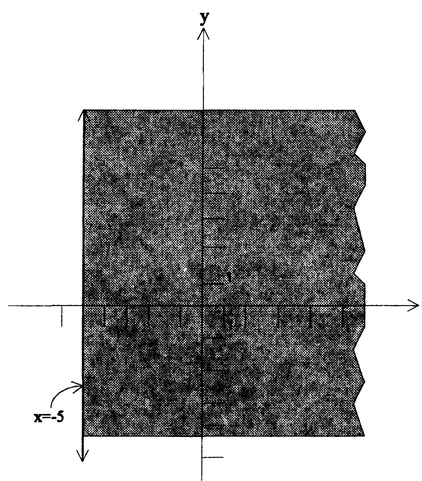
$y<1-x$

Figura 24



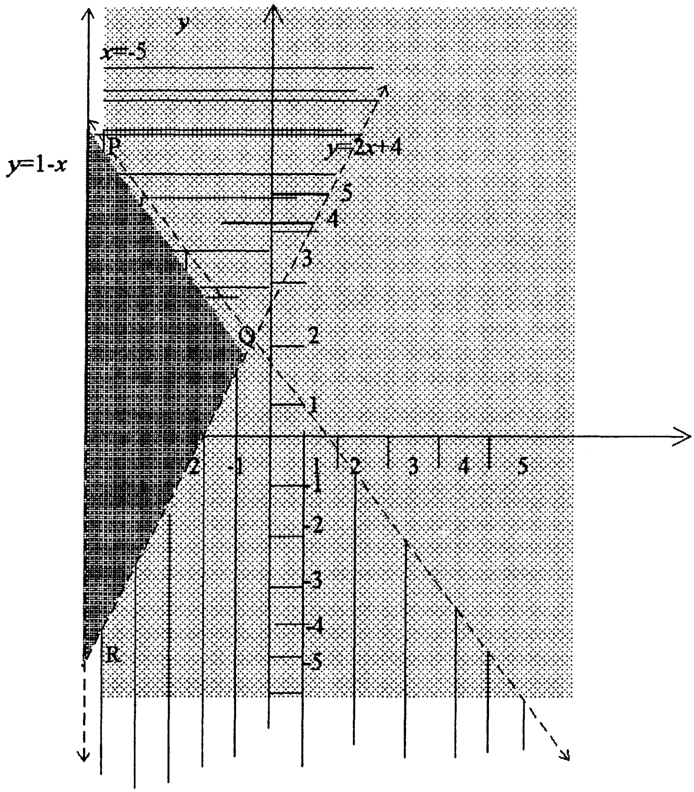
$y>2x+4$

Figura 25



x< -5

Figura 26



En esta situación se nota que la solución gráfica es mucho más significativa que la algebraica.

En los ejemplos (a) y (b) se dan las gráficas de otros dos sistemas de desigualdades. Los ejemplos (c) y (d) son aplicaciones. Se observará que en las aplicaciones de las desigualdades rara vez es única la solución. Sin embargo, en una situación práctica, algunas de las soluciones pueden ser mejores que las otras, y encontrar la mejor solución para una situación en particular es una meta importante.

Ejemplo (a) Usar una gráfica para mostrar el conjunto solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} x > y \\ 3x + y > 6 \\ y < 5 \\ x > 2 \end{cases}$$

Solución: Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} y < x \\ y > 6 - 3x \\ y < 5 \\ x > 2 \end{cases}$$

Se procede de la siguiente manera: se traza la línea $y = x$ (figura 27) y se marca la región $y < x$, después se traza $y = 6 - 3x$ y se localiza la región y > 6–3x. Sean $L_1 = \{(x,y) \mid y=x\}$, $L_2 = \{(x,y) \mid y=6-3x\}$, $L_3 = \{(x,y) \mid y=5\}$, $L_4 = \{(x,y) \mid x = 2\}$ debajo de L_1 y arriba de L_2 es $\{(x,y) \mid y < x,\ y > 6-3x\}$. Consideremos ahora las gráficas de las otras dos desigualdades. Si $y < 5$ y $x > 2$, los puntos deben quedar debajo de L_3 y a la derecha de L_4. A continuación, se sombrea la región que representa la solución: la región abajo de L_1 y L_3, y arriba de L_2 y a la derecha de L_4.

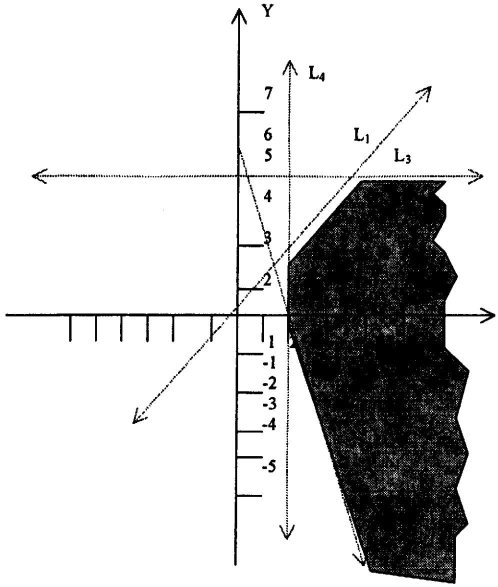
Un sistema que contenga tanto desigualdades como igualdades aparece en el ejemplo siguiente.

Ejemplo (b) Ilustrar la solución del sistema

$$\begin{aligned} &y \geq x - 4 \\ &y < 4x \\ &x = 3 \end{aligned}$$

con una gráfica

Figura 27

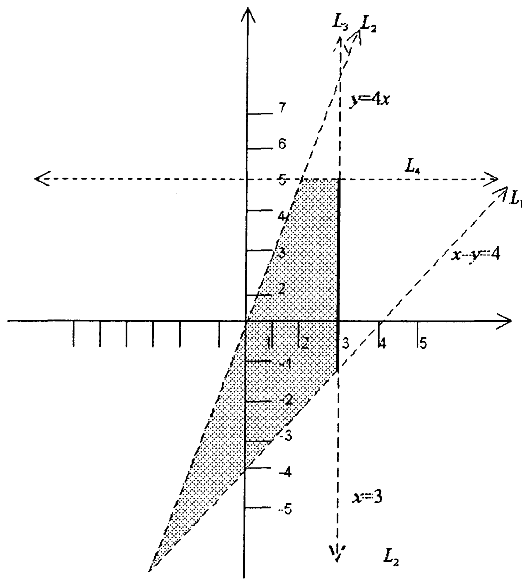


Solución: Sean $L_1 = \{(x,y) \mid x-y = 4\}$, $L_2 = \{(x,y) \mid y = 4x\}$ y $L_3 = \{(x,y) \mid x = 3\}$, marcando las gráficas como en la figura 26. Los puntos que pertenecen al conjunto solución del sistema deben quedar arriba o en L_1, abajo de L_2 y en L_3. Así pues, la gráfica de $\{(x,y) \mid$ y $x-4, y < 4x, x = 3\}$ es la parte de la recta L_3 que está sombreada, incluyendo el punto de intersección con L_1 pero no con L_2.

Supóngase que se desea describir el conjunto de puntos anteriores del triángulo ABC de la figura 28. Puesto que esos puntos quedan a la izquierda de la recta $x = 3$, se debe tener $x < 3$ en vez de $x = 3$, lo que da $\{(x,y) \mid y > x-4, y < 4x, x < 3\}$. Nótese el cambio de $y \geq x-4$ a $y > x-4$, dado que se buscan sólo aquellos puntos que están dentro del triángulo.

Es evidente que las tres líneas dividen al plano en siete regiones. Una de ellas se ha descrito como un conjunto de puntos, mediante un sistema de desigualdades. ¿Puedes hacer lo mismo con las otras seis?

Figura 28



Ejemplo (c) Un agente está arreglando un viaje en esquís. Puede llevar un máximo de 10 personas y ha decidido que deben ir por lo menos 4 hombres y 3 mujeres. Su ganancia será de \$100.°° por cada mujer, y \$150.°° por cada hombre. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres le producirán la mayor ganancia?

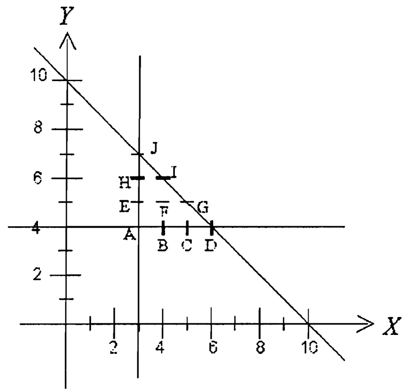
Solución: Sean

x = número de mujeres
y = número de hombres

Entonces x y y deben ser tales que

$$\begin{cases} x+y \leq 10 \\ x \geq 3 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

Figura 29



Al graficar este sistema se nota que (x,y) debe estar dentro o en la frontera del triángulo ADJ de la figura 29. Dado que en $x, y \in N$, hay exactamente 10 pares ordenados de números naturales que satisfacen las tres desigualdades. Cada punto de la gráfica representa a uno de ellos. La ganancia P se puede expresar de la siguiente manera:

Sean P_A la ganancia que produce $A(3,4)$, P_B la que produce $B(4,4)$, etcétera. De todo ello se obtiene

$P = 10x + 15y$

$$P_A = \$1003+\$1504 = \$900$$
$$P_B = \$1004+\$1504 = \$1000$$
$$P_c = \$1005+\$1504 = \$1100$$
$$P_D = \$1006+\$1504 = \$1200$$
$$P_E = \$1003+\$1505 = \$1050$$
$$P_F = \$1004+\$1505 = \$1150$$
$$P_G = \$1005+\$1505 = \$1250$$
$$P_H = \$1003+\$1506 = \$1200$$
$$P_I = \$1004+\$1506 = \$1300$$
$$P_J = \$1003+\$1507 = \$1350$$

Entonces la ganancia máxima es \$1350.°°, en J (3 mujeres y 7 hombres). Nótese también que la ganancia mínima es P_A (3 mujeres y 4 hombres), de manera que el máximo se presenta en un vértice del triángulo y el mínimo en otro.

Esto ilustra, con un ejemplo sumamente simple, un método mucho más general de la matemática aplicada llamado programación lineal. Si se dan dos cantidades variables restringidas por conjuntos de condiciones expresables como desigualdades lineales, la gráfica de ese sistema suele ser el conjunto de puntos dentro de alguna figura geométrica cerrada limitada por rectas, llamada polígono.* Después, si se puede expresar una tercera cantidad en forma de una expresión lineal que comprenda las mismas dos variables, su máximo o mínimo se presenta en los valores de las variables de uno de los vértices del polígono. No se intenta demostrar esto, pero el razonamiento que sigue debe hacerlo evidentemente razonable, al menos para situaciones simples. Si esto se hubiera sabido antes de resolver el ejemplo (c), sólo se habrían tenido que encontrar las coordenadas de los puntos A,D y J, sabiendo que la ganancia máxima debía presentarse en uno de dichos puntos.

Se buscaba maximizar la función $P = 100x + 150y$, donde x y y, estaban limitadas por las condiciones dadas en el problema. Consideremos el conjunto de ecuaciones.

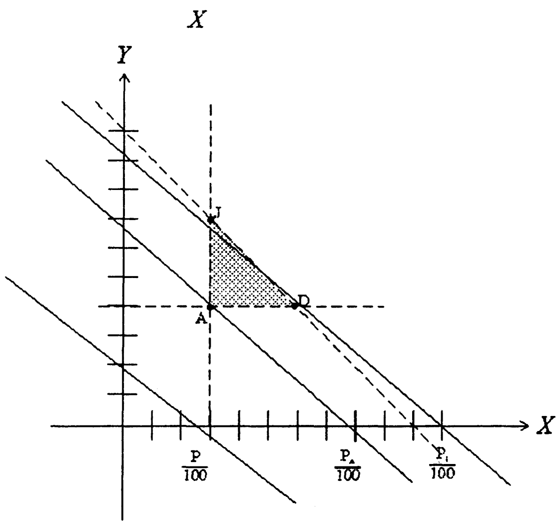
$$100x + 150y = P_1, \qquad 100x + 150y = P_2, \qquad 100x + 150y = P_3, \ldots$$

en donde $P_1, P_2, P_3, \ldots$ son números reales fijos que representan la ganancia. Las gráficas serán un conjunto de líneas paralelas que cortan el eje x en los puntos $\frac{P_1}{100}, \frac{P_2}{100}, \frac{P_3}{100}, \ldots$ Al crecer la ganancia, crece la intersección con x.

Considérense todas las líneas que intersectan al triángulo ADJ. ¿No es obvio que la pasa por A representa la ganancia mínima y la que pasa por J representa la máxima? Si no es obvio, tómese una de tales líneas L, por ejemplo $10x + 15y = 30$, gratificada en la figura 30. Visualice ahora otra línea paralela a L y véala moverse hacia A. Sea L_A la posición de esta línea cuando toca al punto A. En este caso A es el primer punto del triángulo que intersecta la línea y que representa la ganancia mínima, puesto que la intersección con x está creciendo. A medida que se mueve sobre el triángulo, pero siempre paralela a L, J será el último punto del triángulo que intersecte la línea. P_J, por tanto, será la ganancia máxima. Considérese otra situación:

* Algunos ejemplos de polígonos son (1) triángulo, tres lados; (2) cuadrilátero, cuatro lados; (3) pentágono, cinco lados; seis lados; etc.

Figura 30



Ejemplo (d) Una firma de corredores de bolsa ofrece dos tipos de inversiones que producen ingresos a razón del 4% y 5% respectivamente. Un cliente desea invertir un máximo de \$100 mil y que su ingreso anual sea por lo menos de \$4 500. Insiste en que por lo menos 3/4 del total debe ser invertido al 5%. El corredor recibe un 1% de los ingresos de la inversión al 5% y un 2% de la inversión al 4%. ¿Cuánto invertirá el corredor a cada tasa para que sus honorarios sean máximos?

Solución: Sean

x = cantidad invertida al 4%
y = cantidad invertida al 5%

Si se utiliza la información dada, se puede construir el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y \leq 100\,000 \\ 4x + 5y \geq 450\,000 \end{cases}$$
$$y \geq 75000$$
$$x \geq 0$$

La gráfica muestra que (x,y) puede ser cualquier punto interior o de la frontera del cuadrilátero *ABCD* de la figura 31.

Los honorarios F del corredor se pueden expresar como sigue

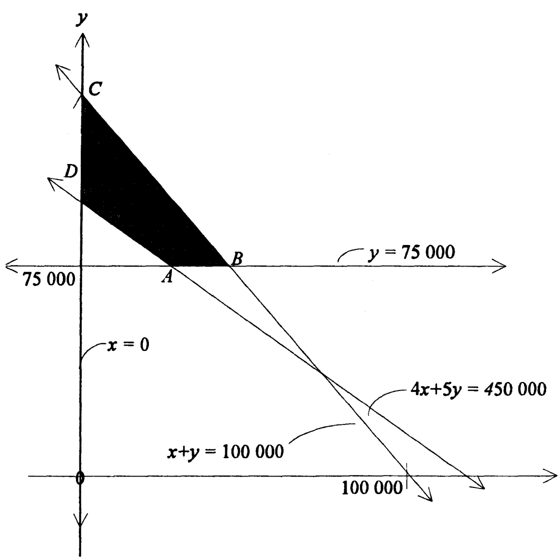
$$F = (0.01)(0.05)y + (0.02)(0.04)x$$
$$= 0.0005y + 0.0008x$$

Las coordenadas de A, B, C y D se encuentran resolviendo las ecuaciones simultáneas de las rectas que corresponden. $A = (18\,750, 75\,000)$, $B=(25\,000, 75\,000)$, $C= (0, 100\,000)$ y $D = (0,90\,000)$. Ahora se utiliza la ecuación (1) para encontrar los honorarios del corredor en los puntos A,B,C y D:

$$F_A = \$52.50 \quad F_C = \$50.00$$
$$F_B = \$57.50 \quad F_D = \$45.00$$

Aceptado que el máximo debe ocurrir en uno de los vértices, debe ser de \$57.50 en B, en donde la cantidad invertida al 4% es de \$25000.°° y la cantidad al 5% es de \$75 000.°°

Figura 31



Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 6, trazar y describir la gráfica de cada uno de los sistemas de desigualdades.

1. $\begin{cases} y < x + 1 \\ 2y + 1 > 2x \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x + y < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 3x \leq 4y \\ x < 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y - x < 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y < 4 \\ 3x - y < 6 \\ x + y + 1 > 0 \\ 3x + y > -3 \end{cases}$

En los ejercicios 7, 8 y 9 describir la región poligonal que sea la gráfica del sistema de desigualdades dado. Hallar las coordenadas de los vértices.

7. $\begin{cases} |x| < 4 \\ |y| < 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x < 2 \\ x + y < 4 \\ x - y + 2 < 0 \\ x + 3y + 6 > 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y > -1 \\ y < 3 \\ x - y < 2 \\ y - x < 1 \end{cases}$

10. Utilizar desigualdades para escribir los puntos del plano que no están entre las rectas paralelas

$$3x - y = 6 \qquad \text{y} \qquad 12x - 4y = 15$$

11. Utilizar desigualdades para describir los puntos que están dentro del rectángulo cuyos vértices son $A(3,5)$, $B(3, -2)$, $C(6, -2)$ y $D(6,5)$.

Capítulo 11

Progresiones aritméticas y geométricas

Si a un conjunto de números se le da un cierto orden, entonces tal conjunto se conoce como *sucesión,* y a los elementos que la constituyen se les denomina *términos*. Así, el primer número de la sucesión es el término 1, el segundo número es el término 2, el *n*-ésimo número es el término *n*, etcétera. Puede observarse, por tanto, que hay una correspondencia uno a uno entre los términos de una sucesión y el conjunto de los números naturales, de modo que es válido interpretar a una sucesión como una función cuyo dominio es parcial o totalmente la colección de los números naturales y cuyo rango está formado por los propios términos de la sucesión. Dicho sea de paso, cuando una sucesión tiene un número limitado de términos se trata de una sucesión *finita* y en caso contrario de una sucesión *infinita.*

Si se denota al término *i* de una sucesión como a_i, entonces:

$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots. a_n$ es una sucesión finita de *n* términos
y $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots.$ es una sucesión infinita

Una sucesión se puede definir a través de una expresión funcional denominada fórmula *de inducción o de recurrencia,* mediante la cual se puede hallar el *n* término de la sucesión. Es decir:

$a_n = f(n)$: expresión funcional cuyo dominio $D_f = N$

Considérense los siguientes ejemplos:

a) 1, 2, 3, 4, 5, ...
b) 1, ½, 1/3, 1/4, 1/5, ...
c) 1, 4, 7, 10, 13, ...

Si se recuerda que los términos de tales sucesiones son elementos del rango de la correspondiente fórmula de inducción y que el dominio es el conjunto de los números naturales, se puede representar la regla de correspondencia para cada uno de los casos presentados como sigue:

a) D_f	R_f	b) D_f	R_f	c) D_f	R_f
1	→ 1	1	→ 1	1	→ 1
2	→ 2	2	→ 1/2	2	→ 4
3	→ 3	3	→ 1/3	3	→ 7
4	→ 4	4	→ 1/4	4	→ 10
5	→ 5	5	→ 1/5	5	→ 13
....			.....		.....
n	→ ?	n	→ ?	n	→ ?

El caso a) muestra claramente que cada elemento del dominio es idéntico a su correspondiente en el rango de manera que: $f(n) = n$
O también: $a_n = n$

El caso b) indica que a cada elemento del dominio le corresponde su recíproco en el rango por lo que:

$$f(n) = 1/n$$
$$a_n = 1/n$$

El caso c) es menos inmediato pues requiere más reflexión. Primeramente, hay que observar que los elementos del rango son una sucesión de números que crecen a razón de 3 unidades, lo cual sugiere que si a los elementos del dominio se les multiplica por 3 se obtendrá una sucesión cuyos elementos también se van incrementando en 3 unidades pero que se distinguen, de los que constituyen la sucesión, en que son *mayores* por 2 unidades, es decir:

R_f	$3*D_f$
1	3
4	6
7	9
10	12
13	15

de donde resulta que:

R_f	$3*D_f - 2$
1	$3*1 - 2$
4	$3*2 - 2$

$$\begin{array}{ll} 7 & 3*3-2 \\ 10 & 3*4-2 \\ 13 & 3*5-2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

$$\searrow 3n-2 \swarrow$$

y así: $f(n) = 3n - 2$ o: $a_n = 3n - 2$

En todos los casos se halló una fórmula de inducción o de recurrencia que depende de n, número natural. Como una sucesión es función de los números naturales, ésta define analíticamente la "ley" que rige a aquélla y permite no sólo determinar al término general a_n sino cualquier otro que se desee.

Es importante subrayar que no es necesariamente fácil establecer la fórmula de inducción que corresponda e incluso puede darse el caso de sucesiones que tengan los mismos términos de inicio y sin embargo sus fórmulas de recurrencia sean diferentes.

Por ejemplo:

d) D_f R_f	e) D_f R_f
$1 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 3$	$2 \rightarrow 3$
$3 \rightarrow 5$	$3 \rightarrow 5$
$4 \rightarrow 7$	$4 \rightarrow 7$
....	.....
$n \rightarrow 2n-1$	$n \rightarrow 2n-1+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

En la sucesión d), $f(n) = 2n-1$ hace corresponder a cada número natural todos los impares. En cambio, en la sucesión e) la asociación ocurre entre los naturales y *algunos* impares –los que resulten de aplicar su fórmula de recurrencia– que, además, crecerán a "saltos" cada vez mayores.

Ejemplos:

1) Si:

i) $a_n = f(n) = \dfrac{2^{n-1}}{4^2 + 1}$ ii) $a_n = f(n) = \dfrac{x^{n-1}}{(n+1)\,!}$

* $n!$ se lee n factorial y significa el producto de los primeros n naturales, esto es, $n! = 1 * 2 * 3 \dots n$.

Hallar los respectivos cuatro primeros términos de una y otra sucesión. En:

i) $\dfrac{2^\circ}{1^2+1}, \quad \dfrac{2^1}{2^2+2}, \quad \dfrac{2^2}{3^2+1}, \quad \dfrac{2^3}{4^2+1}, \quad \ldots\ldots =$

$= \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{10}, \dfrac{8}{17}, \ldots = \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{8}{17}, \ldots$

ii) $\dfrac{x^2}{2!}, \quad \dfrac{x^3}{3!}, \quad \dfrac{x^4}{4!}, \quad \dfrac{x^5}{5!}, \ldots\ldots = \dfrac{x^2}{2\cdot 1}, \quad \dfrac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1}, \quad \dfrac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}, \quad \dfrac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1},$

$= \dfrac{x^2}{2}, \quad \dfrac{x^3}{6}, \quad \dfrac{x^4}{24}, \quad \dfrac{x^5}{120}, \ldots$

2) Si:

i) $a_n = f(n) = \dfrac{2n+1}{4n-2}$ ii) $a_n = f(n) = \dfrac{(-1)\, n{-}1\sqrt{n}}{n+1}$

hallar los tres primeros términos y a_{n+1} de una y otra sucesión. En:

i) $\dfrac{2\cdot 1+1}{4\cdot 1-2}, \quad \dfrac{2\cdot 2+1}{4\cdot 2-2}, \quad \dfrac{2\cdot 3+1}{4\cdot 3-2}, \ldots\ldots = \dfrac{3}{2}, \quad \dfrac{5}{6}, \quad \dfrac{7}{10}, \ldots\ldots$

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)-2} = \frac{2n+3}{4n+2}$$

ii) $\dfrac{(-1)^{1-1}\sqrt{1}}{1+1}, \quad \dfrac{(-1)^{2-1}\sqrt{2}}{2+1}, \quad \dfrac{(-1)^{3-1}\sqrt{3}}{3+1}, \ldots = \dfrac{1}{2}, \quad -\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \quad \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \ldots\ldots$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1-1}\sqrt{n+1}}{n+1+1} = \frac{(-1)^{n}\sqrt{n+1}}{n+2}$$

3) Plantear el n-ésimo término y el n+1 término de las siguientes series:

i) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} + \ldots$ *ii)* $\dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \ldots\ldots$

ii) $\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{1!} + \dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} + \dfrac{5\cdot 6\cdot 7}{5!} + \ldots$ *iv)* $1 - \dfrac{x}{2\cdot 2^2} + \dfrac{x^2}{2^2\cdot 3^2} - \dfrac{x^3}{2^3\cdot 4^2} + \ldots$

Recuérdese el hecho de que el dominio de una sucesión es el conjunto de los números naturales y que su rango son los términos que la constituyen. Así que en:

i) $1 \to \frac{1}{2}$ ...por lo tanto:

$1 \to \frac{3}{4}$

$$n \to \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}$$

$1 \to \frac{5}{6}$

$$y : n+1 \to \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2\,(n+1)}$$

ii) $1 \to \frac{1}{1!}$

$1 \to -\frac{1}{2!}$ por lo tanto

$$n \to (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

$1 \to \frac{1}{3!}$

$$y : n+1 \to (-1)^{(n+1)-1}\frac{1}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n}}{(n+1)!}$$

iii) $1 \to \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1}$ por lo tanto

$1 \to \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!}$

$$n \to \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{(2n+1)!}$$

$1 \to \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{5!}$

$$n+1 \to \frac{[(n+1)+2][(n+1)+3][(n+1)+4]}{[2(n+1)-1]!} = \frac{(n+3)(n+4)(n+5)}{(2n+1)!}$$

iv) $1 \to 1$

$2 \to -\frac{x}{2 \cdot 2^2}$

$$n \to (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}n^2} = (-\frac{x}{2})^{n-1} \Big/ n^2$$

$3 \to \frac{x^2}{2^2 \cdot 3^2}$

$$\text{y } n+1 \to (-1)^{(n+1)-1}\frac{x\,(n+1)-1}{2^{(n+1)-1}(n+1)^2} = (-\frac{x}{2})^{n} \Big/ (n+1)^2$$

$4 \to \frac{x^3}{2^3 \cdot 4^2}$

......

Ejercicios

1) Dadas:

$i)\ f(n)=2^n$ $\qquad$ $ii)\ f(n)=5(-1)^n$ $\qquad$ $iii)\ f(n) = \begin{cases} 0;\ n \text{ impar} \\ 1;\ n \text{ par} \end{cases}$

hallar los primeros tres términos, el séptimo y el undécimo

2) Si: $f(1)=1$ y $f(n)=ka_{n-1}$; $n>1$ hallar el cuarto, sexto, noveno y decimotercer términos

3) Dadas las sucesiones:

$i)\ 2,4,8,16,\ldots$ $\qquad$ $ii)\ \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

hallar dos expresiones distintas para su fórmula de recurrencia.

La suma de los términos de una sucesión se llama *serie*. Desde luego, si la sucesión es finita la serie será finita y en caso contrario se tratará de una serie infinita. Así pues, si se tiene por ejemplo:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

una serie finita se indicará como:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i$$

y si se propone una serie infinita se tendrá:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Por ejemplo, la sucesión de los números naturales es:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Si se denota a cualquier número natural con i, la suma de n números naturales está dada por:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para demostrar que tal expresión es cierta para cualquier sucesión de números naturales cualquiera que sea la cantidad de términos que contenga, es necesario recurrir al *principio de inducción matemática*. Este principio se concreta en el siguiente teorema:

Dada una proposición $P(n)$ que depende de un número natural n, si:

i) $P(1)$ es verdadera
ii) Se supone $P(K)$ verdadera y se deduce que $P(K+1)$ es también verdadera

entonces $P(n)$ será cierta para todo n.

En el caso de la suma de n números naturales se trata de comprobar que:

$P(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ es verdadera, si:

i) $n = 1$ entonces $$P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1 = \sum_{i=1}^{1} i$$

es decir, la suma de un número natural, el primero, es 1

ii) n=2 entonces $P(2) = \dfrac{2(2+1)}{2} = 3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} i = 1+2$

o sea que la suma de los primeros dos números naturales es 3

iii) $n = k$ entonces $P(k) = \dfrac{k(k+1)}{2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = 1+2+\ldots+k$

se supone cierta.

iv) $n = k + 1$ entonces:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+\ldots+k+k+1$$

Pero como: $1 + 2 + \ldots + k = P(k)$ entonces:

$$P(k)+k\ +1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(\ k\ +1)+2(k+1)}{2}=$$

$$=\frac{(k+2)(k+1)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=P(k+1)$$

Es decir, que si a partir de haber supuesto verdadera a $P(k)$ no se hubiera hallado que $P(k+1)$ *también* es verdadera, entonces la fórmula

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

no hubiera sido cierta para cualquier sucesión de números naturales.

Ejercicios

1) Demostrar por medio del principio de inducción matemática las siguientes series:

i) $1+x+x^2+\ldots.+x^{n-1}=\dfrac{x^{n-1}}{x-1};\quad x\neq 1$

ii) $1+2^2+3^2+\ldots.+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

iii) $3+3^2+3^2+\ldots.+3^n=\dfrac{3}{2}(3^n-1)$

2) Expresar las siguientes series con la notación de suma (Σ):

i) $1-2+3-4+5-\ldots-50$

ii) $2-4+8-16+32$

iii) $1+6+11+16+21$

iv) $\frac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+2+\dfrac{5}{2}+3$

Progresiones aritméticas

Una sucesión en la cual se conoce el primer término (a_1), hay una diferencia (d) entre un término y el inmediato anterior y se sabe el número de términos (n) que la constituye, se conoce como progresión aritmética; de manera que el n-ésimo término estará dado por:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

La suma S_n de los n primeros términos de una progresión aritmética se encuentra mediante la siguiente fórmula

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Ejemplos:

1) Hallar el cuarto, el noveno y el n-término de las siguientes progresiones aritméticas:

i) $3, 2.7, 2.4, \ldots$
ii) $-7, -3.9, -0.8, \ldots$
iii) $\ln 3, \ln 9, \ln 27, \ldots$

Aplicando: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ resulta que en:

i) $d = -0.3$ por lo que: $a_4 = 2.1$
$y\ a_9 = 3+(9-1)(-0.3) = 0.6$

Además: $a_n = 3+(n-1)(-0.3) = 3.3-0.3_n$

ii) $d = 3.1$ por lo que $a_4 = 2.3$
$y\ a_9 = -7+(9-1)3.1 = 17.8$

Además: $a_n = -7+(n-1)3.1 = 3.1n - 10.1$

iii) $d = \ln 3$ por lo que: $a_4 = 4\ln 3 = \ln 3^4 = \ln 81$
$y\ a_9 = \ln 3 + (9-1)\ln 3 = 9\ln 3 =$
$= \ln 3^9 = \ln 19683$

Además: $a_n = \ln 3+(n-1)\ln 3 = n\ln 3 = \ln 3^n$

2) Hallar la suma de las siguientes progresiones aritméticas según los datos que se indican:

i) $a_1 = 40$, ‘ $d = -3$, ‘ $n = 30$
ii) $a_1 = -9$, ‘ $a_{10} = 15$, ‘ $n = 10$

Recordar que: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ y conjuntamente con: $a_n = a_1+(n-1)d$, se obtiene en:

i) $a_n = 40 + 29(-3) = 40 - 87 = -47$ por lo que:

$$S_{30} = \frac{30}{2}(40 + 47) = -\frac{210}{2}$$

ii) Primeramente: $a_{10} = a_n = 15$ por lo que:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(-9 + 15) = 30$$

Ejercicios

1) El primer término de una progresión aritmética es 1 y la diferencia entre sus términos es 9. Hallar el 20° término y la suma de sus primeros 24 términos.

2) Una progresión aritmética tiene como primer término a 3, como diferencia entre sus términos a 5 y como suma de ellos, 255. Hallar cuántos términos la forman.

3) Dados dos términos de las siguientes progresiones aritméticas, hallar una fórmula para el enésimo término:

i) $a_9 = 27$, $a_{15} = 45$ ii) $a_{10} = -25$, $a_{15} = -35$ iii) $a_7 = 15$, $a_{51} = -18$

4) Obtener la suma de términos que se indique para las siguientes progresiones aritméticas:

i) S_{60} para: 11, 1, –9, …
ii) S_{14} para: 3/10, 2/5, ½, …
iii) S_{12} para: –5, $-4\frac{5}{8}, -4\frac{1}{4}, \ldots$

5) Hallar el número de términos de las progresiones aritméticas cuyos primer término, diferencia común y suma se indican:

i) $a_1=2$, $d=4$, $S_n=200$
ii) $a_1=-3$, $d=2$, $S_n=12$
iii) $a_1=15$, $d=-3/2$, $S_n=57/2$

Progresiones geométricas

Análogamente, hay sucesiones en las que cada término proviene de multiplicar el inmediato anterior por una constante (r) y se les llama *progresiones geométricas*.

En ellas, los datos conocidos son: el primer término (a_1), la constante o razón común (r) y el número de términos (n). Así pues, el n-ésimo término será:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

A su vez, la suma S_n de los n primeros términos de una progresión geométrica estará dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}; \quad r \neq 1$$

Cuando una progresión geométrica está constituida de un número infinito de términos y su razón común es:

$$|r|<1$$

entonces la suma se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

Es importante aclarar que el resultado, en este caso, será permanentemente una *aproximación* pues no es posible obtener un "total" cuando se tiene un número ilimitado de sumandos.

Ejemplos:

1) Hallar el cuarto, el séptimo y el n-término de las siguientes progresiones geométricas:

i) 8, 4, 2, … ii) 300, –30, 3, … iii) 4, –6, 9, …

Aplicando: $a_n = ar^{n-1}$ se obtiene en:

i) $r = ½$ por lo que: $a_4 = 8\,(½)^{4-1} = 8(½)^3 = 8/8 = 1$

$$y: a_7 = 8(½)^{7-1} = \frac{8}{2^6} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

Además: $a_n = 8 \cdot (½)^{n-1} =$

$$\frac{8}{2^{n-1}} = \frac{8}{\frac{2^n}{2}} = \frac{16}{2^n}$$

$$ii)\ \ r=\left(-\frac{1}{10}\right) \text{ por lo que: } a_4=300\left(-\frac{1}{10}\right)^{4-1}=$$

$$=300\left(-\frac{1}{10}\right)=-0.3$$

$$\text{y}: a_7=300\left(-\frac{1}{10}\right)^{7-1}=300\left(\frac{1}{1000000}\right)=$$

$$=0.0003$$

$$\text{Además: } a_n=300\cdot\left(-\frac{1}{100}\right)^{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}300}{10^{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 300}{10^{n}}$$

$$iii)\ \ r=\left(-\frac{3}{2}\right) \text{ por lo que: } a_4=4\left(-\frac{3}{2}\right)^{4-1}=$$

$$=-4\cdot\frac{27}{8}=-\frac{27}{2}=-0.3$$

$$\text{y}: a_7=300\left(-\frac{3}{2}\right)^{7-1}=4\cdot\frac{3^6}{2^6}=4\cdot\frac{729}{64}=\frac{729}{16}$$

$$\text{Además: } a_n=4\ -\frac{3}{2}^{n-1}=\frac{(-3)^{n-1}4}{2^{n-1}}=\frac{(-3)^{n-1}\cdot 8}{2^{n}}$$

2) Hallar la suma de las siguientes progresiones geométricas:

$i)\ \ \sum_{i=1}^{10} 3^i$ $\qquad\qquad$ $ii)\ \ \sum_{j=0}^{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-1}$

Como en este caso en :

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r};\qquad r\neq 1$$

i) $$0 = \frac{3(1-3^{10})}{1-3} = \frac{3\cdot(-19682)}{-2} = 3\cdot 9841 = 29523$$

ii) $$S_9 = \frac{(-2)[1-(\frac{1}{2})^9]}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{(-2)(1+\frac{1}{2^9})}{-2} = \frac{-2-\frac{1}{2^8}}{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{\frac{(-2)2^8-1}{2^8}}{\frac{3}{2}} = \frac{2[(-2)2^8-1]}{2^8\cdot 3} = \frac{-513}{2^7\cdot 3} = \frac{-171}{128}$$

Ejercicios

1) Hallar el primer término, la razón común, el n-ésimo término y la suma de las siguientes progresiones geométricas:

i) 3, 6, 12, 24, …
ii) 8, 24, 72, 216, …
iii) 16, –4, 1, –1/4, …

2) En las siguientes progresiones geométricas, hallar los elementos indicados según los datos que se proporcionen. Recordar que: a_1 denota el primer término de una progresión; a_i es el i-ésimo término; a_n es el n-ésimo término; r es la razón común y S_n es la suma de los n primeros términos.

i) Dados: $r = -2$, $S_9 = -513$ hallar: a_1, a_9

ii) Dados: $r = -¼$, $a_8 = -1/16$ hallar: a_1, a_8

iii) Dados: $a_1 = 7/4$, $a_n = 11$, $S_n = 222¼$ hallar: r, n

3) En las siguientes progresiones geométricas infinitas hallar la suma:

i) 7/10 + 7/100 + 7/1000 +…
ii) 1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 +…

Un ejemplo interesante de progresión puede ser el siguiente:

$$a + b, (a + b)^2, (a + b)^3, \ldots, (a + b)^n$$

Los términos de dicha sucesión se pueden presentar como:

$$(a + b), (a + b)(a + b), (a + b)(a + b)^2 , \ldots., (a + b)(a + b)^{n-1}$$

de modo que fácilmente se puede identificar que el primer término es

$$a_1 = a + b$$

y la razón común es: $\quad r = a + b$

Supóngase que se deseara obtener la suma de los tres primeros términos; es decir:

$$(a + b) + (a + b)^2 + (a + b)^3$$

Según la fórmula ya citada, se tendría:

$$S_3 = \frac{(a+b)[1-(a+b)^3]}{1-(a+b)}$$

El binomio entre corchetes es una diferencia de cubos, por lo tanto:

$$S_3 = \frac{(a+b)[1-\cancel{(a+b)}][(1+(a+b)+(a+b)^2]}{1-\cancel{(a+b)}} =$$

$$= (a+b)[1+(a+b)+(a+b)^2]$$

$$= (a+b)+(a+b)^2+(a+b)^3$$

que es precisamente el resultado que se buscaba.

Un aspecto interesante de las potencias de binomios es que si éstas son enteras y no negativas el desarrollo respectivo se conoce como teorema del binomio o fórmula del binomio de Newton; es decir:

$$(a+b)^n = \binom{n}{o}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots. + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots. + \binom{n}{n}b^n$$

$$en \quad donde: \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} ; 0 \leq k \leq n$$

corresponde al k-ésimo término del citado desarrollo binomial. La expresión $\binom{n}{k}$ se conoce como coeficiente binomial y proviene de los dos modos principales de conteo en el análisis combinatorio: permutaciones y combinaciones que a su vez se derivan del principio de conteo secuencial cuya afirmación básica es que si una acción se puede efectuar de l maneras, otra acción se puede realizar de m modos y una más de n formas entonces la secuencia de acciones puede tomar $l*m*n$ caminos distintos.

El binomio de Newton se puede hacer extensivo para el caso de potencias negativas y no enteras debiendo tener en cuenta que en estos casos los desarrollos binomiales tendrán un número infinito de términos. Para valores de n enteros no negativos los coeficientes binomiales se pueden arreglar de acuerdo con una distribución conocida como triángulo de Pascal:

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
....	....

Bibliografía

Bello & J. R. Britton, *álgebra y trigonometría contemporáneas*, México, Harla, 1986.

Chiang C. Alpha, *Métodos fundamentales de economía matemática*, España, McGraw-Hill, 3ª edición, 1987.

Dowling, Edward T, *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales,* Colombia, McGraw-Hill, 1992.

E. W. Swokwoski, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, México, Grupo Editorial Iberoamericana, 2ª edición, 1998.

Haeussler, Ernest F. & Richard S. Paul, *Matemáticas para administración y economía*, México, Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.

Hoffman, Laurence, *Cálculo aplicado a la administración, economía, contaduría y ciencias sociales*, Colombia, McGraw-Hill, 1995.

Howard, Anton, *Introducción al álgebra lineal*, México, Limusa, 1986.

Kline, Morris, *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, México, Conacyt / FCE, 1992.

Kleiman, Ariel y Elena K. De Kleiman, *Aplicaciones matemáticas en economía y administración*, México, Limusa, 1981.

L. Leithold, *Matemáticas previas al cálculo*, México, Harla, 7ª edición, 1998.

Lovaglia & M. A. Elmore, *Álgebra*, México, Harla, última reimpresión, 1998.

Sevilla Joel, Michael Fiol & Robert Sauvegrain, *Tópicos de matemáticas para administración y economía*, México, Trillas, 3ª edición, 1981.

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

de Claramartha Adalid Diez de U., Víctor A. Breña Valle, Andrés Morales Alquicira, Ana Elena Narro, Laura P. Peñalva Rosales, Araceli Rendón Trejo, Jorge O. Rouquette Alvarado, Irene Sánchez Guevara, Tomasa Tlahuel Tlahuel y Sergio de la Vega Estrada; número quince de la colección LA LLAVE, obra editada por la DCSH de la UAM-X, se terminó de imprimir el catorce de enero de mil novecientos noventa y nueve. La producción estuvo a cargo de COMUNICACIÓN GRÁFICA Y REPRESENTACIONES PJ. SA DE CV. Arroz doscientos veintiséis, colonia Santa Isabel Industrial, México DF. El tiro consta únicamente de quinientos ejemplares impresos en papel bond de cincuenta kilos (interiores) y couché de doscientos diez gramos (cubiertas), y en su formación se utilizaron los tipos *times* (de ocho, diez, once, doce, trece, catorce y quince puntos) y *garamond* (de diez y once puntos). El cuidado de la edición estuvo a cargo de Ana Elena Narro Ramírez.

Uno de los problemas que se presentan con mayor frecuencia entre los estudiantes de ciencias sociales es su limitada formación en álgebra elemental. Carencia que se hace evidente en los cursos de matemáticas que forman parte de la curricula de la carrera que estudian.

Este libro pretende ser una guía de autoaprendizaje que permita al alumno identificar sus deficiencias y mejorar su capacidad de comprensión.

El material que lo compone fue diseñado por un grupo de profesores que imparten cursos de matemáticas en la División de Ciencias Sociales y Humanidades de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Xochimilco, e incluye ejercicios que el alumno podrá resolver para facilitar su aprendizaje.